MA1002-7 Cálculo Diferencial e Integral
Profesores: Emilio Vilches
Auxiliares: Ilana Mergudich - Ignacio Riego
Fecha: Viernes 30 de Septiembre

Auxiliar 3: Repaso de Derivadas y TVM

P1. Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) $\operatorname{arc\,sen}(x)$

b) $\arctan(x)$

c) $\dfrac{1}{a^2+x^2}$

d) $e^{1/\ln(x)}$

e) $\operatorname{arctanh}(x)$

f) $\arctan(x)+\operatorname{arccot}(x)$

P2. Usando la definición de derivadas calcule $(\log(x))'$ y verifique que cumple la propiedad del teorema de la función inversa.

P3. Sea ABC un triángulo de lados a, b y c. Si $a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos(\theta)}$ demuestre que $\dfrac{da}{d\theta}=h_a$, donde h_a es la altura asociada al lado del triángulo de lado a. Interprete geométricamente este resultado.

P4. Sea $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable en $\mathbb{R}$ con $f(0)=f'(0)=0$. Demuestre que existe $\xi\in(0,1)$ tal que $f''(\xi)=2f(1)$.
Indicación: Considere $g(x)=f(x)-x^2f(1)$.

P5. Un grupo de biólogos marinos quiere determinar la especie de una ballena. Ellos saben que las ballenas blancas nunca alcanzan velocidades superiores a $0{,}05[\frac{\text{km}}{\text{h}}]$ mientras que las ballenas grises pueden alcanzar velocidades mucho mayores. Una ballena se asoma a la superficie. Sobre su cabeza, se observa una población de 100 parásitos por cm^2. Se sabe que la población de estos parásitos crece una tasa mayor a 10 $[\frac{\text{parásitos}}{\text{cm}^2\cdot\text{hora}}]$. Tiempo después, a trés kilómetros del avistamiento inicial, se observa a la misma ballena pero ahora tiene sobre su cabeza 600 parásitos por cm^2.

Usando el Teorema del Valor Medio determine la especia de la ballena.

P6. Sea $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función derivable.

a) Encuentre la formula de la recta normal a la curva $y=f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$.
b) Determine la fórmula de $g_d(x)$ que para cada x entrega la mayor ordenada $\bar{y}$ de los puntos $(\bar{x},\bar{y})$ que se encuentran sobre la recta normal a la curva $y=f(x)$ en el punto $(x,f(x))$, y que están a una distancia d del punto $(x,f(x))$.

P7. Demuestre, usando el Teorema de Valor Medio, que:

$$\forall x\geq 0,\ \ \frac{x}{1+x}\leq\log(1+x)\leq x.$$