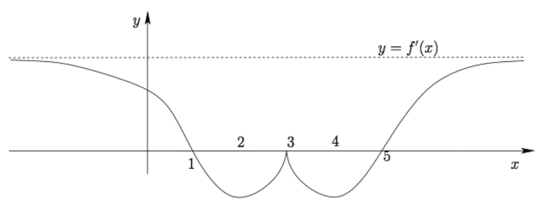
MA1002-7 Cálculo Diferencial e Integral
Profesores: Emilio Vilches
Auxiliares: Ilana Mergudich - Ignacio Riego
Fecha: Viernes 7 de Octubre

Auxiliar 4: Análisis de Funciones y Optimización

P1. Estudie completamente la siguiente función $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$. Para ello:

a) Estudie el dominio, paridad, periodicidad y ceros de f.
b) Estudie recorrido y la existencia de asíntotas.
c) Calcule f', estudie el crecimiento de f y analice la existencia de mínimos y máximos.
d) Calcule f'', estudie la convexidad de f y los puntos de inflexión.
e) Bosqueje f.

P2. La siguiente figura muestra el gráfico de la derivada f' de una función f. A partir de esta información, indique todos los puntos de máximos, mínimos e inflexiones de f. Justifique.



P3. Una función $f : [a,b] \to (0,+\infty)$ se dice log-convexa si $\ln(f(x))$ es convexa.

a) Demuestre que f log-convexa $\Rightarrow$ f convexa.
b) ¿Lo anterior es una equivalencia?
c) Demuestre que f es log-convexa $\Leftrightarrow$ f^α es convexa $\forall \alpha > 0$.

P4. En el departamento de repostería de la FCFM se ha determinado que para hacer un pastel ideal se requiere primero hornearlo y luego enfriarlo durante un tiempo antes de servirse. La deliciosidad de este pastel estará dada por la suma de dos funciones f y g continuas, donde f depende del tiempo de horneado y g del tiempo de enfriamiento.

$$x = \text{tiempo de horneado} \qquad w = \text{tiempo de enfriado}$$
$$\text{Deliciosidad total} = f(x) + g(w)$$

a) Supongamos que tenemos solamente un tiempo M para hornear y enfriar un pastel, pero sabemos que tanto $f(x)$ como $g(w)$ alcanzan su máximo en el intervalo $[0,M]$ en los puntos t_f y t_g respectivamente. Demuestre que si horneamos un pastel por t minutos y lo enfriamos por $M-t$ minutos la deliciosidad alcanza su máximo en algún punto entre t_f y t_g.
b) Los nuevos avances de la ciencia han permitido determinar que la deliciosidad del pastel está dada por las siguientes 2 fórmulas:
$$f(x) = -x^2 + 100x \qquad g(w) = 8\sqrt{2}w^{\frac{3}{2}} - w^2$$
Con estos nuevos conocimientos encuentre la mejor distribución del tiempo para un M cualquiera.
c) Analice en caso en que M es muy grande, ¿qué convendría hacer? ¿Hay algún M óptimo?