

MA1002-7 Cálculo Diferencial e Integral**Profesores:** Emilio Vilches**Auxiliares:** Ilana Mergudich - Ignacio Riego**Fecha:** Viernes 23 de Septiembre

Auxiliar 2: Sucesiones, Continuidad, TVI y TMm

P1. Considere la función

$$f(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y + \sin(x) - 1}{x + y}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Analice la continuidad de f en $\mathbb{R}$.

P2. Considere la familia de polinomios $g_n(x) = x^n + x - 1$.

- a) Pruebe que $\forall n \geq 1$, $g_n(x)$ tiene sólo una raíz r_n positiva.
- b) Demuestre que la sucesión de raíces $(r_n)_{n \geq 1}$ tiene una subsucesión convergente.

P3. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) \geq |x|$.

- a) Sea $I = [-f(0), f(0)]$. Demuestre que $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus I)$ se tiene que $f(x) > f(0)$.
- b) Demuestre que si f es continua entonces f alcanza su mínimo global en $\mathbb{R}$.

P4. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, tal que $\text{Im}(f) \subset \mathbb{Q}$. Demuestre que f es constante.

P5. Demuestre que la función $\tan(x) = x$ tiene una infinidad de raíces reales.

P6. En clases se vio el siguiente resultado:

Teorema 1 (Continuidad de la función inversa). *Sea $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y estrictamente monótona en un intervalo I . Entonces $J = f(I)$ es un intervalo y la inversa $f^{-1} : J \rightarrow I$ es continua.*

Demuestre que J es un intervalo.

P7. Responda las siguientes preguntas:

- a) ¿Existen funciones continuas y sobreyectivas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$?
- b) ¿Existen funciones continuas y sobreyectivas de $[0, 1]$ en $[0, 1[$?
- c) ¿Existen funciones continuas y sobreyectivas de $[0, 1[$ en $]0, 1[$?
- d) ¿Existen funciones continuas y sobreyectivas de $]0, 1[$ en $[0, 1[$?