P1)

$$f(x) = \lim_{y \to 0} \frac{e^y + \text{sen}(x) - 1}{x+y}$$

$$f(0) = \lim_{y \to 0} \frac{e^y + \cancelto{0}{\text{sen}(0)} - 1}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{y} \overset{\text{límite conocido}}{=} 1$$

$$\underset{x \neq 0}{f(x)} = \lim_{y \to 0} \frac{e^y + \text{sen}(x) - 1}{x+y} \neq \lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{x+y} + \frac{\text{sen}(x)}{x+y} = \left[\lim_{y \to 0} \frac{\cancelto{0}{e^y - 1}}{\cancelto{x}{x+y}} \right]^{\to 0} + \frac{\text{sen}(x)}{x}$$

$$\Rightarrow \underset{x \neq 0}{f(x)} = \frac{\text{sen}(x)}{x}$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Si $x \neq 0$, $f(x)$ es continua por álgebra de continuas ($\text{sen}(x)$ y x son continuas). Sólo falta ver si es continua en $x=0$.

Sea $x_n \to 0$

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{\text{sen}(x_n)}{x_n} \overset{\text{límite conocido}}{=} 1 = f(0)$$

$\therefore$ f es continua en 0, y por lo tanto f es continua en todo $\mathbb{R}$.

P2) $g_n(x) = x^n + x - 1$

a) P.D.Q: $\forall n \geq 1$ $g_n(x)$ tiene una raíz positiva.

$\iff$ P.D.Q $\forall n \geq 1$ $\exists x_0 \geq 0$ tal que $g(x_0) = 0$

(esto tiene toda la pinta de T.V.I)

¿qué nos pide el T.V.I?

1. Función continua

$g_n(x)$ es continua $\forall n \geq 1$ por álgebra de continuas

(x^n, x y 1 son continuas)

2. $f(a) \cdot f(b) \leq 0$

en efecto: $g_n(0) = -1 < 0 \quad \forall n \geq 1$

$g_n(1) = 1 > 0 \quad \forall n \geq 1$

$\Rightarrow g_n(0) \cdot g_n(1) \leq 0 \quad \forall n \geq 1$

$\therefore$ Por T.V.I $\exists x_0 \in [0,1]$ tal que $g_n(x_0) = 0$ $\forall n \geq 1$, es decir, $\forall n \geq 1$ $\exists r_n \in [0,1]$ tal que r_n es raíz de $g_n(x)$.

$\Rightarrow \forall n \geq 1$ $\exists r_n$ positivo raíz de $g_n(x)$.

b) Recordemos el teorema de Bolzano-Weirstrass:

"Toda sucesión acotada tiene al menos una subsucesión convergente"

P.D.Q: $(r_n)_{n \geq 1}$ tiene una subsucesión convergente

Por (a) sabemos que $r_n \in [0,1]$ $\forall n \geq 1$

$\Rightarrow \quad 0 \leq r_n \leq 1 \quad \Rightarrow (r_n)$ es una sucesión acotada

$\therefore$ Por teorema de Bolzano-Weirstrass, $(r_n)_{n \geq 1}$ tiene al menos una subsucesión convergente. //

$\boxed{P3}$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.q. $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) \geq |x|$

a) Sea $I = [-f(0), f(0)]$

P.d.Q. $(\forall x \in \mathbb{R}/I)$ $f(x) > f(0)$

En otras palabras:

$$x \notin I \Rightarrow f(x) > f(0)$$

ahora $x \notin I \iff x > f(0)$ ó $x < -f(0)$

es decir $x \notin I \iff |x| > f(0)$

ahora por enunciado $f(x) \geq |x|$

y en el caso de $x \notin I$: $f(x) \geq |x| > f(0)$

b) Si f es continua, por TMm sabemos que

f alcanza su mínimo y máximo local
en un intervalo cerrado

$\Rightarrow \exists x_{min}, x_{max} \in I$ tq $\forall x \in I$ $f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$

ahora, $0 \in I \Rightarrow f(x_{min}) \leq f(0)$

Como $I = [-f(0), f(0)]$, $\forall x \notin I$ $f(x) > f(0) \geq f(x_{min})$

Ahora, $f(x_{min})$ mínimo global ya que

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \begin{cases} x \in I, & f(x_{min}) \leq f(x) \\ x \notin I & \Rightarrow f(x) > f(0) \geq f(x_{min}) \end{cases}$$

P4] • Intuitivamente, esto se cumple porque entre dos racionales siempre hay un irracional y como la función es continua, no puede llegar a dos racionales distintos sin pasar por un irracional entremedio.

Por lo tanto, la única forma de que $Im(f) \subseteq \mathbb{Q}$ es si llega siempre al mismo racional, es decir, $f(x) = p$ $p \in \mathbb{Q}$.

• Formalmente:

Por contradicción supongamos que $\exists q_1, q_2$ $q_1 \neq q_2$ tal que $f(a) = q_1$ y $f(b) = q_2$ donde $a, b \in \mathbb{R}$ arbitrarios con $a < b$

Podemos decir entonces que $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua y $q_1, q_2 \in f([a,b])$

Entonces, por T.V.I se tiene que $\forall m \in [q_1, q_2]$ $\exists x \in [a,b]$ tal que $f(x) = m$.

Necesariamente existe un irracional I en $[q_1, q_2]$ y por lo tanto $\exists x \in [a,b]$ tal que $f(x) = I$. Pero $Im(f) \subseteq \mathbb{Q}$

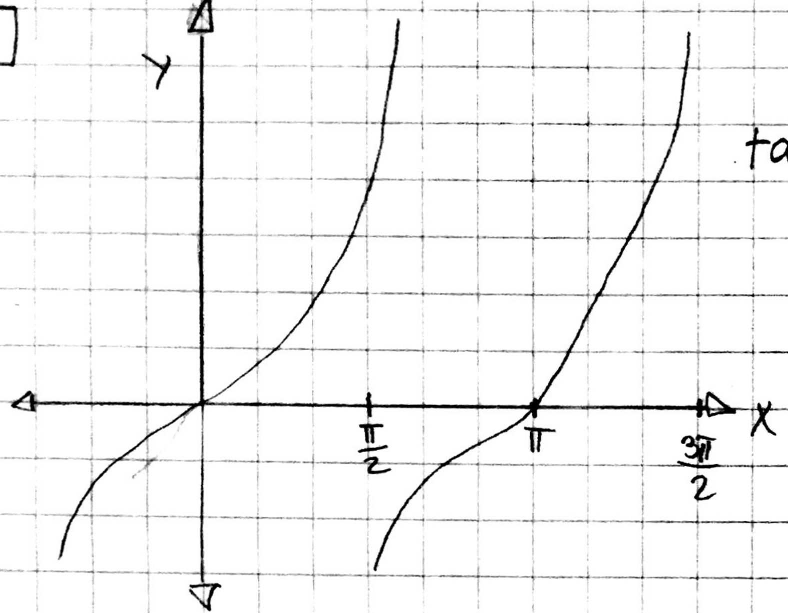
$$\rightarrow\leftarrow$$

$\therefore$ no es posible que f llegue a dos racionales distintos

$$\Rightarrow f(x) = q \quad \text{con } q \in \mathbb{Q} \text{ constante.}$$

$\therefore$ f es constante //.

P5



En este gráfico podemos ver que $tg(x)$ es periódica con periodo π.

Ahora, $\tan(x) = x$ se cumple cuando

$$\tan(x) - x = 0$$

Ahora, $\forall k \in \mathbb{Z}$ $\lim\limits_{x \to (\pi k + \frac{\pi}{2})^-} \tan(x) = -\infty$

$\Rightarrow \forall M > 0, \exists \delta$ tq $x - \pi k + \frac{\pi}{2} < \delta \Rightarrow \tan(x) < -M$

puedo tomar $M = x_1$ entonces:

$x - \pi k + \frac{\pi}{2} < \delta \Rightarrow \tan(x_1) < -x_1 \Rightarrow \tan(x_1) - x_1 < 0$

Podemos repetir lo mismo con $\lim\limits_{x \to (k\pi + \frac{3\pi}{2})^+} \tan(x) = \infty^+$

Y obtenemos: $\forall M > 0, \exists \delta > 0,\ k\pi + \frac{3}{2}\pi - x < \delta$

$\Rightarrow \tan(x) > M$

P5 Igual que antes tomamos $M = x$ para obtener:

$$\exists \delta,\ k\pi + \frac{3\pi}{2} - x < \delta \Rightarrow \tan(x) > x$$
$$\Rightarrow \tan(x) - x > 0$$

Ahora, juntando ambos logramos

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \exists x_1, x_2 \in \left[k\pi + \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{3\pi}{2}\right]$$

tales que $\tan(x_1) - x_1 < 0$ y $\tan(x_2) - x_2 > 0$

Por TVI $\Rightarrow \exists \bar{x}$ tq $\tan(\bar{x}) - \bar{x} = 0$ en el intervalo $\left[k\pi + \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{3\pi}{2}\right]$

Como esto se tiene para todo $k \in \mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}$ es infinito, hay infinitos $\bar{x}$ raíces de la ecuación.

$\boxed{P6}$

Sea $f: I \subset \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$

f continua y estrictamente monótona en I

P. d. Q. $J = f(I)$ es un intervalo

Primero que nada consideremos que f es creciente, si f fuera decreciente el proseso es el mismo pero con las desigualdades invertidas.

Como f es est. monótona:

$$\bar{x} < \hat{x} \Rightarrow f(\bar{x}) < f(\hat{x}) \quad \forall x \in I \qquad (1)$$

Por TMm, $\exists\, x_{max}, x_{min} \in I$ tales que:

$$\forall x \in I \quad f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max}) \qquad (2)$$

Usando (1) tenemos: $f(\bar{x}) > f(\hat{x}) \Rightarrow \bar{x} > \hat{x}$

lo que con 2 nos lleva a que $\min(I) = x_{min}$
$\max(I) = x_{max}$

Ahora, $\forall y \in [f(x_{min}), f(x_{max})]$, por TVI

tenemos que $\exists\, x \in I$ t.q. $f(x) = y$

$\Rightarrow y \in J$.

$\therefore f(I) = [f(x_{min}), f(x_{max})]$