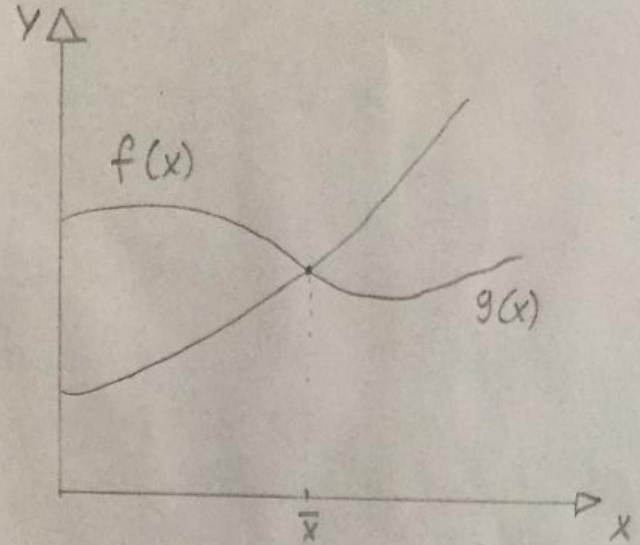
P1 Sean f y g continuas

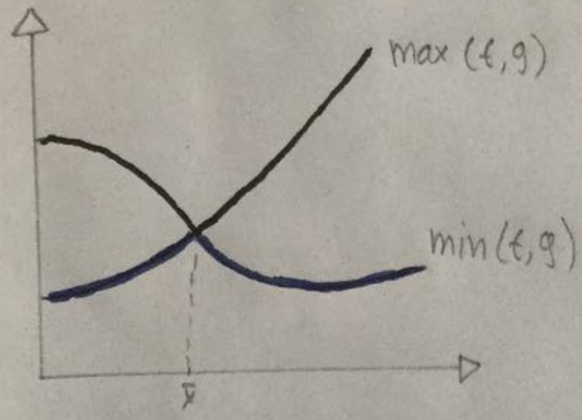
P.d.Q. $\max(f,g)(x)$ y $\min(f,g)(x)$ son continuas.

Partamos considerando el gráfico:



Con estas 2 funciones f y g cualquiera podemos comenzar a entender el problema.

Si marcamos $\max(f,g)$ y $\min(f,g)$ con colores tenemos:



Podemos ver que en $\bar{x}$ f y g se cruzan.
Si $x \neq \bar{x}$ $\min(f,g)$ es igual a f o a g, por lo tanto va a ser continua.
Entonces, solo debemos fijarnos en los puntos como $\bar{x}$ donde $f(\bar{x}) = g(\bar{x})$ ya que la continuidad ahí no es obvia.

Esta pregunta puede responderse de dos formas, la primera es con la definición ε, δ:

f es continua $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta_1>0, \forall x \in \mathbb{R}\ |x-\bar{x}|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(\bar{x})|<\varepsilon$ (1)

g es continua $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta_2>0, \forall x \in \mathbb{R}\ |x-\bar{x}|<\delta_2 \Rightarrow |g(x)-g(\bar{x})|<\varepsilon$ (2)

Estos son nuestros datos, y con ellos queremos mostrar que:

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta_3>0, \forall x \in \mathbb{R}\ |x-\bar{x}|<\delta_3 \Rightarrow |\max(f,g)(x)-\max(f,g)(\bar{x})|<\varepsilon$

Para demostrar esto debemos:

- Tomar un $\varepsilon>0$ desconocido, cualquiera.
- Usar (1) y (2) para construir un δ_3.
- Verificar que δ_3 verifica lo que queremos.

Entonces, sea $\varepsilon>0$ cualquiera.

Usando (1) sabemos que $|x-\bar{x}|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(\bar{x})|<\varepsilon$

" (2) " $|x-\bar{x}|<\delta_2 \Rightarrow |f(x)-f(\bar{x})|<\varepsilon$

Queremos que ambas condiciones se cumplan, por lo que tomamos: $\delta_3 = \min(\delta_1, \delta_2)$

Ahora $|x-\bar{x}|<\delta_3 \Rightarrow |f(x)-f(\bar{x})|<\varepsilon \wedge |g(x)-g(\bar{x})|<\varepsilon$

Como dijimos antes, $g(\bar{x}) = f(\bar{x})$, ya que solo esos puntos nos interesan.

Además $\max(f,g)(x)$ es igual a f o igual a g.

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}\ |x-\bar{x}|<\delta_3 \Rightarrow |\max(f,g)(x) - \underset{\underset{g(\bar{x})}{\parallel}}{f(\bar{x})}|<\varepsilon$$

Pero, $g(\bar{x}) = f(\bar{x}) \Rightarrow \max(f,g)(\bar{x}) = f(\bar{x}) = g(\bar{x})$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}\ |x-\bar{x}|<\delta_3 \Rightarrow |\max(f,g)(x) - \max(f,g)(\bar{x})|<\varepsilon$

$\therefore$ Dado un ε cualquiera, encontramos un δ_3 que satisface lo pedido, i.e. $\max(f,g)$ es continua.

Ahora usando sucesiones:

$\forall x_n \to \bar{x}$, $\min(f,g)(x_n) \to \min(f,g)(\bar{x}) \iff \min(f,g)$ es continua

Sea $x_n \to \bar{x}$ y $\bar{x}$ t.q. $f(\bar{x}) = g(\bar{x})$

Claramente $f(x_n) - \min(f,g)(x_n) \geq 0$

Ya que si $\min(f,g) = f \Rightarrow f(x) - \min(f,g) = 0$

y, si $\min(f,g) = g \Rightarrow f(x) - g(x) > 0$

$\Rightarrow \quad 0 \leq f(x_n) - \min(f,g)(x_n)$

ahora, $f(x_n) - \min(f,g)(x_n) \leq \max(f,g)(x_n) - \min(f,g)(x_n)$

por un argumento similar al anterior

$\Rightarrow \quad 0 \leq f(x_n) - \min(f,g)(x_n) \leq \max(f,g)(x_n) - \min(f,g)(x_n)$

Pero $\max(f,g)(x_n) - \min(f,g)(x_n) = |f(x_n) - g(x_n)|$

Porque si $f(x_n) > g(x_n) \Rightarrow |f(x_n) - g(x_n)| = f(x_n) - g(x_n)$

y si $g(x_n) > f(x_n) \Rightarrow |f(x_n) - g(x_n)| = g(x_n) - f(x_n)$

$\Rightarrow \quad 0 \leq f(x_n) - \min(f,g)(x_n) \leq |f(x_n) - g(x_n)|$

Usando el teorema del sandwich:

$0 \leq f(x_n) - \min(f,g)(x_n) \leq |\overset{0}{\cancel{f(x_n) - g(x_n)}}|$

$\Rightarrow f(x_n) - \min(f,g)(x_n) \to 0 \Rightarrow \min(f,g)(x_n) \to f(\bar{x})$

$\therefore$ Toda sucesión $x_n \to \bar{x}$ cumple $\min(f,g)(x_n) \to \min(f,g)(\bar{x})$

es decir $\min(f,g)$ es continua en todo $\bar{x}$ t.q. $f(\bar{x}) = g(\bar{x})$

P2| P.D.Q x_n es convergente

Sabemos que las subsucesiones x_{2n}, x_{2n+1} y x_{3n} convergen.

Digamos que: $x_{2n} \to x_1$

$x_{2n+1} \to x_2$

$x_{3n} \to x_3$

Recordemos que una sucesión es convergente, ssi ("si y sólo si") todas sus subsucesiones convergen al mismo límite.

- Tomemos la sucesión $\underline{x_{6n}}$

↳ es subsucesión de x_{2n} $\Rightarrow$ $x_{6n} \to x_1$

↳ es subsucesión de x_{3n} $\Rightarrow$ $x_{6n} \to x_3$

Pero una sucesión no puede converger a dos límites distintos

$\Rightarrow \underline{x_1 = x_3}$

- Tomemos la sucesión $\underline{x_{6n+3}}$

↳ es subsucesión de x_{2n+1} $\Rightarrow$ $x_{6n+3} \to x_2$

↳ es subsucesión de x_{3n} $\Rightarrow$ $x_{6n+3} \to x_3$

Nuevamente por unicidad del límite podemos concluir que $\underline{x_2 = x_3}$

Tenemos entonces que $x_1 = x_2 = x_3$. En particular tenemos que x_{2n} y x_{2n+1} convergen a lo mismo.

Pero x_{2n} son todos los elementos con índices pares de x_n, es decir $x_0, x_2, x_4, \ldots$ y x_{2n+1} son los elementos con índices impares, es decir $x_1, x_3, x_5, \ldots$

y si TODOS los elementos con índices pares a partir de cierto punto se acercan a x_1 (convergen a x_1) y a partir de otro punto TODOS los elementos con índices impares se acercan también a x_1 (convergen a x_1), existe un punto a partir del cual TODOS los elementos de x_n se acercan a x_1; es decir, $x_n \to x_1$

$\therefore x_n$ es convergente.

Formalmente:

Tenemos que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0 \quad |x_{2n} - x_1| < \varepsilon \quad (x_{2n} \to x_1)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n}_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq \bar{n}_0 \quad |x_{2n+1} - x_1| < \varepsilon \quad (x_{2n+1} \to x_1)$

y por lo tanto

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tilde{n}_0 = \max(n_0, \bar{n}_0) \text{ tal que } \forall n \geq \tilde{n}_0 \quad |x_n - x_1| < \varepsilon$$

$\Leftrightarrow x_n$ es convergente

P3 | TEOREMA DE PUNTO FIJO DE BROWER

P.D.Q si $f: [a,b] \to [a,b]$ continua, entonces $\exists x_0 \in [a,b]$ tal que

$$f(x_0) = x_0$$

Hasta ahora sólo conocemos un teorema que nos asegura la existencia de un $\bar{x}$ en un intervalo, TVI (Teorema del valor intermedio)

Recordemos: T.V.I

Sea $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua tal que $g(a) \cdot g(b) \leq 0$. Entonces $\exists \bar{x} \in [a,b]$ tal que $g(\bar{x}) = 0$

el problema es que nosotros queremos que $f(x_0) = x_0$, no 0 y no tenemos idea como es $f(a)$ y $f(b)$.

- Para solucionar el primer problema definamos

$$h: [a,b] \to \mathbb{R}$$
$$h(x) = f(x) - x$$

De tal manera que si $h(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = x_0$.

Se tiene que h es continua por álgebra de continuas (f y x son continuas).

- Ahora sólo falta ver que $h(a) \cdot h(b) \leq 0$.

Sabemos que f va de $[a,b]$ en $[a,b]$

$$\Rightarrow a \leq f(x) \leq b \quad \forall x \in [a,b]$$

En particular, $a \leq f(a) \iff f(a) - a \geq 0 \iff h(a) \geq 0$

$f(b) \leq b \iff f(b) - b \leq 0 \iff h(b) \leq 0$

$$\Rightarrow h(a) \cdot h(b) \leq 0$$

$\therefore$ Por T.V.I $\exists x_0 \in [a,b]$ tal que $h(x_0) = 0 \iff f(x_0) - x_0 = 0 \iff f(x_0) = x_0$ //

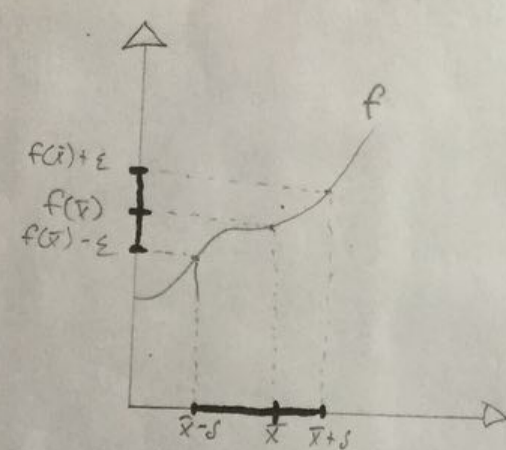
P4

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x=\frac{p}{q} \text{ fracción irreducible.}\end{cases}$$

- Pruebe que $f(x)$ es continua en todo $x \notin \mathbb{Q}$ (1)
- Pruebe que $f(x)$ no es continua en todo $x \in \mathbb{Q}$ (2)
- Propuesto: ¿Que pasa en $x=0$?

Para responder esta pregunta, hace falta pensar en lo que significa continuidad:

Este es el gráfico de una función f continua cualquiera.



"Si aplicamos f muy cerca de $\bar{x}$ (δ) obtendremos resultados tan cerca de $f(\bar{x})$ como queramos (ε)".

Con esto vamos a pensar (2).

Supongamos $\bar{x}=\frac{p}{q} \Rightarrow f(\bar{x})=\frac{1}{q}$.

Como los irracionales (x_0 t.q. $x_0 \notin \mathbb{Q}$) son densos en $\mathbb{R}$, para cualquier δ que tomemos al rededor de $\bar{x}$ va a existir un irracional en ese rango:

$$\forall \delta>0, \exists x_0 \notin \mathbb{Q} \text{ t.q. } x_0 \in [\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta]$$

Y como sabemos $f(x_0)=0$, tenemos:

$$|f(x_0)-f(\bar{x})| = |0-\tfrac{1}{q}| = \tfrac{1}{q}$$, es decir $f(x_0)$ y $f(\bar{x})$ están a una distancia de $\frac{1}{q}$, entonces, no pueden acercarse todo lo que yo quiera:

$$\exists \varepsilon<\tfrac{1}{q} \text{ t.q. } \forall \delta>0, \exists x_0 \notin \mathbb{Q} \text{ t.q. } x_0 \in [\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta] \wedge \underbrace{|f(x_0)-f(\bar{x})|}_{\frac{1}{q}} > \varepsilon$$

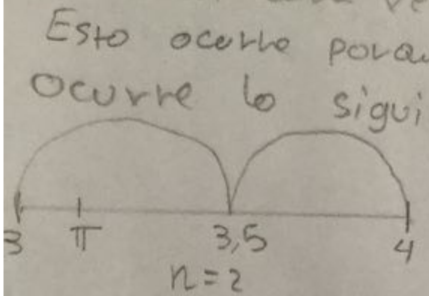
$\therefore$ f no es continua en $\bar{x} \in \mathbb{Q}$

$\frac{1}{q} > \varepsilon$

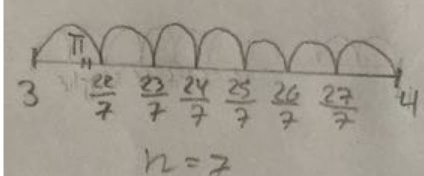
Ahora, para hacer 1 debemos pensar un poco en las fracciones:

$3 = \frac{3}{1}$; $3{,}1 = \frac{31}{10}$; $3{,}14 = \frac{22}{7}$; $3{,}141 = \frac{311}{99}$; $3{,}1415 = \frac{6283}{2000}$

Como vemos, al acercanos a π los denominadores se vuelven cada vez más grandes.
Esto ocurre porque, como $\pi \notin \mathbb{Q}$, si tratamos de aproximarlo ocurre lo siguiente

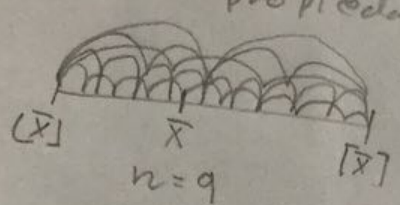


3,5 es la mejor aproximación que podemos obtener con una fracción de denominador 2, $\frac{7}{2}$ y cualquier otra fracción de denominador 2 sería una peor aproximación.



Si voy agrandando n, obtendré mejores y mejores resultados cada vez, como este caso con $\frac{22}{7}$, sin embargo, para mejorar mi aproximación debo aumentar mi denominador n.

Esto no sólo aplica para π, todo irracional $\bar{x}$ cumple la misma propiedad.



Una ves trazadas todas las aproximaciones fraxcionales de $\bar{x}$ con denominador $\leq n$ puedo tomar la mejor aproximacion, x_0 y saber que existe una mejor, pero como ya usé todas las fracciones de un cierto denominador, la siguiente aproximación debe tener un denominador más grande para ser precisa.

Esta es la idea crucial para resolver el problema, ya que en términos matemáticos:

Sea $\overline{x} \notin \mathbb{Q}$, tomo $\frac{p_0}{q_0} = \min_{\frac{p_0}{q_0}} \left\{ \left|\frac{p_0}{q_0} - \overline{x}\right|, q_0 < n_0 \right\}$

Es decir, la fracción $\frac{p_0}{q_0}$ / $q_0 < n_0$ más cercana a $\overline{x}$

sabemos que toda fracción más cercana que $\frac{p_0}{q_0}$ debe cumplir $q_1 \geq n_0$, por la forma en que construimos $\frac{p_0}{q_0}$.

Formalizemos estas ideas,

Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. Tomemos n_0 t.q. $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$

Ahora $\frac{p_0}{q_0} = \min_{\frac{p_0}{q_0}} \left\{ \left|\frac{p_0}{q_0} - \overline{x}\right|, q_0 < n_0 \right\}$, definimos $\delta = \left|\frac{p_0}{q_0} - \overline{x}\right|$

como dijimos antes, si $\frac{p_1}{q_1}$ está más cerca de $\overline{x}$ que $\frac{p_0}{q_0} \Rightarrow n_0 < q_1$

$\hookrightarrow \forall \frac{p_1}{q_1} \quad \left|\overline{x} - \frac{p_1}{q_1}\right| < \delta \Rightarrow q_0 < q_1$

Usando lo anterior:

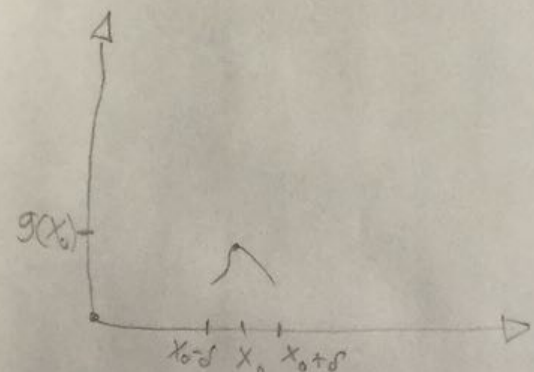
$$n_0 < q_1 \Rightarrow \frac{1}{q_1} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

Si unimos todo:

Sea $\varepsilon > 0$, $\exists \delta = \left|\frac{p_0}{q_0} - \overline{x}\right|$, $\forall \frac{p_0}{q_0} \in \mathbb{Q}$

P5 $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, $g(x_0) > 0$

La intuición:



Como g es continua, cerca de x_0 los valores $g(x_0)$ deben ser cercanos a $g(x_0)$, es decir, tener el mismo signo

Como g es continua:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R} \ |x - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(\bar{x})| < \varepsilon$

como $g(x_0) > 0$, tomo $\varepsilon = g(x_0)$

$\Rightarrow \exists \delta_0, \forall x \in \mathbb{R} \ |x - x_0| < \delta_0 \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < g(x_0)$

ahora, $|g(x) - g(x_0)|$ si $g(x) > g(x_0)$

$\Rightarrow g(x) > g(x_0) > 0$, y por lo tanto cumple la proposición

en cambio $|g(x) - g(x_0)|$ si $g(x_0) > g(x)$

$\Rightarrow |g(x) - g(x_0)| = g(x_0) - g(x)$

y por la definición $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon = g(x_0)$

$\Rightarrow g(x_0) - g(x) < g(x_0)$

$\Rightarrow -g(x) < 0$

$\Rightarrow 0 < g(x)$ //

P6|

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\log(x)}{x-1} & \text{si } x>0,\ x\neq 1 \\ \alpha & \text{si } x=1 \end{cases}$$

$*\log(x) = \ln(x)$

en general en este ramo log se refiere a ln.

queremos encontrar un α tal que f sea continua, es decir, un α tal que si $x_n \to 1$, $f(x_n) \to \alpha$.

sea entonces $x_n \to 1$

(L'Hôpital)

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n \log(x_n)}{x_n - 1} \overset{L'\hat{H}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\log(x_n) + \frac{x_n}{x_n}}{1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \overset{0}{\log(x_n)} + 1 = 1$$

$\therefore$ para $\alpha = 1$, $f(x)$ es continua.

NOTA: Es muy común que les pidan estudiar la continuidad de una función "g" cualquiera, en general uno busca el lugar donde "explota" (en este caso $x=1$) y buscan como "parchar" la función en ese punto (encontrar el α). Para todo el resto de los puntos se argumenta por álgebra de continuas.

$\boxed{P7}$ Toda función f continua puede escribirse de la forma:

$f = I + P$, con I t.q. $-I(x) = I(-x)$ y
con P t.q. $P(x) = P(-x)$

consideremos: $\left.\begin{aligned} f(x) &= I(x) + P(x) \\ f(-x) &= -I(x) + P(x) \end{aligned}\right\}$ aquí asumimos que existen para encontrar una forma de I y P

$$f(x) + f(-x) = 2P(x)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) + f(-x)}{2} = P(x)$$

P es claramente cont., ya que $f(x)$ y $f(-x)$ son continuas

Ahora

$$f(x) - P(x) = I(x)$$

$$f(x) - \frac{f(x) - f(-x)}{2} = I(x)$$

$$\frac{f(x) - f(-x)}{2} = I(x)$$ que también es continua por álgebra de continuas.

$\boxed{\text{Fun fact}}$: si $f(x) = e^x$, $I = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$

$P = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$