

**MA1002-7** Cálculo Diferencial e Integral**Profesores:** Emilio Vilches**Auxiliares:** Ilana Mergudich - Ignacio Riego**Fecha:** Miércoles 14 de Septiembre

## Auxiliar 1: Sucesiones y Continuidad

**P1.** ¿Es cierto que si  $f$  y  $g$  son continuas, también lo son  $\max(f, g)$  y  $\min(f, g)$ ?

**P2.** Sea  $(x_n)$  una sucesión tal que las subsucesiones  $(x_{2n})$ ,  $(x_{2n+1})$  y  $(x_{3n})$  son convergentes. Demuestre que la sucesión  $(x_n)$  es convergente.

**P3.** (Teorema de Punto fijo de Brouwer)

Sea  $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$  una función continua. Demostrar que existe un  $x_0 \in [a, b]$  tal que  $f(x_0) = x_0$ .

**P4.** Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ fracción irreducible} \end{cases}$$

Pruebe que  $f$  es continua en todo punto  $\bar{x} \notin \mathbb{Q}$  y discontinua en todo  $\bar{x} \in \mathbb{Q}$

**P5.** Sea  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua en un punto  $x_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $g(x_0) > 0$ . probar que existe  $\delta > 0$  tal que  $g(x) > 0$  para todo  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ .

**P6.** Considere:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \log(x)}{x-1} & \text{si } x > 0, x \neq 1 \\ \alpha & x = 1 \end{cases}$$

Encuentre  $\alpha$  para que  $f$  sea continua.

**P7.** Demuestre que toda función continua  $f$  puede escribirse en la forma  $f = P + I$ , donde  $P$  es par y continua y  $I$  es impar y continua.