MA1A2 Cálculo Diferencial e Integral. Semestre 2008-02
Profesor: Raúl Uribe
Auxiliares: Cristóbal Quiñinao - Renato Valenzuela

Solución Problemas Semana II

23 de Agosto de 2008

Problemas

1. Dado $a > 0$, sea $f : [0, 2a] \to \mathbb{R}$ continua, tal que $f(0) = f(2a)$. Pruebe que $\exists \overline{x} \in [0, a]$ tal que $f(\overline{x}) = f(\overline{x} + a)$.

   Solución.- Esta es la típica pregunta de aplicación del Teorema de los Valores Intermedios, para encontrar la solución definimos la siguiente función:

$$\begin{array}{rccl} g: & [0,a] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & g(x) = f(x+a) - f(x) \end{array}$$

   Debemos verificar que esté bien definida, ello no es difícil pues si $x \in [0, a]$ entonces $x + a \in [a, 2a]$ y por lo tanto es posible evaluar f tanto en x como en $x + a$.

   Otro detalle a verificar es que la función g es continua, pero ello es obvio pues es composición y resta de funciones continuas. Finalmente notamos dos hechos:

$$g(0) = f(0) - f(a) \quad \wedge \quad g(a) = f(2a) - f(a)$$

   más aún, como $f(2a) = f(a)$ entonces

$$g(a) = f(a) - f(0)$$

   y por lo tanto

$$g(0)g(a) = (f(0) - f(a))(f(a) - f(0)) = -(f(0) - f(a)) \leq 0$$

   Luego aplicando el TVI[1] sigue que $\exists \overline{x} \in [0, a]$ tal que $g(\overline{x}) = 0$ que es equivalente a decir que

$$f(\overline{x}) = f(\overline{x} + a).$$

2. Un monje vive en un monasterio a los pies de una montaña. El día 7 de cada mes a las $00:00$ hrs., el monje comienza una caminata de 24 horas hasta la cumbre de la montaña. Una vez en la cumbre, medita durante 6 horas y luego baja la montaña de vuelta al monasterio. Demuestre que existen dos instantes, uno en el día 7 y otro en el día 8, en los que el monje se encuentra a la misma distancia del monasterio a la misma hora.

   Solución.- Bueno el enunciado es muchísimo más largo que la solución, de hecho el problema es sólo una formulación de la pregunta anterior pero en un contexto "aplicado".

[1] Teorema de los Valores Intermedios

Definimos la función

$$\begin{array}{rccl} d: & [0,48] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & d(x) = \text{ distancia del monje al monasterio} \end{array}$$

Notemos que a menos que el monje se teletransporte su cambio de distancia seguirá una curva continua, luego d debe ser una función continua, más aún $d(0) = d(48) = 0$ y así tenemos las mismas condiciones que el problema anterior para $a = 24$.

Deducimos que existe $\overline{x} \in [0,24]$ tal que $d(\overline{x}) = d(\overline{x} + 24)$, es decir, un instante está en el día 7 y el otro en el día 8, con lo cual hemos concluído lo que se pedía.

3. Un conductor demora 5 horas en recorrer los (aproximadamente) 500 kms. que separan Santiago y Concepción. Pruebe que existe un tramo del viaje, de una longitud de 100 kms., que es recorrido en exactamente 1 hora.

Solución.- Como siempre hay que definir la correcta función, para ello debemos centrarnos en lo que nos piden probar. Como queremos encontrar un intervalo temporal, lo óptimo es definir la siguiente relación:

$$d(t) \quad := \quad \text{distancia acumulada recorrida por el móvil}$$

Para poder resolver el problema haremos un par de supuestos necesarios:

- La rapidez del móvil está acotada.
- El conductor, para ahorrar bencina, decide no devolverse en el camino Santiago-Concepción, esto es, $v(t) \geq 0$.

Con lo anterior definimos la función a la cual aplicaremos el TVI, sea

$$\begin{array}{rccl} g: & [0,4] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & g(t) = d(t+1) - d(t) - 100 \end{array}$$

notar que está bien definida (el argumento es similar al del problema 1.)

Bajo los supuestos anteriores se tiene que necesariamente existe un instante donde $g(t^*) \leq 0$, de no ser así significa que $\forall t \in [0,5] \;\; d(t+1) - d(t) > 100$, en particular:

$$\begin{array}{rcl} d(1) - d(0) & > & 100 \\ d(2) - d(1) & > & 100 \\ d(3) - d(2) & > & 100 \\ d(4) - d(3) & > & 100 \\ d(5) - d(4) & > & 100 \end{array}$$

Sumando se concluye que $d(5) - d(0) = 500 - 0 > 500$ lo cual es una contradicción. Entonces se tiene que efectivamente existe $t^* \in [0,4]$ tal que $g(t^*) \leq 0$, con lo cual tenemos los casos:

- $g(t^*) = 0$, en este caso

  $$g(t^*) = d(1+t^*) - d(t^*) - 100 = 0 \Rightarrow d(1+t^*) - d(t^*) = 100$$

- $g(t^*) > 0$, luego como

  $$g(4) = 500 - g(4) - 100 = 400 - g(4) \geq 0$$

  con lo cual se tiene que $g(4) \cdot g(t^*) \leq 0$ y aplicando el TVI se tiene la existencia de t^{**} tal que $g(t^{**}) = 0$ con lo cual caemos en el caso anterior.

4. *a*) Sean f, g funciones continuas en $[a, b]$, $a < b$ y tales que $f(a) \neq f(b)$, $f(a) = -g(b)$ y $f(b) = -g(a)$. Pruebe que $\exists x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = -g(x_0)$.

Solución.- Definimos $h(x) = f(x) + g(x)$ con $x \in [a, b]$ bien definida y continua. Notamos que

$$h(a) = f(a) + g(a) = f(a) - f(b)$$

y además

$$h(b) = f(b) + g(b) = f(b) - f(a)$$

con lo que se tiene

$$h(a) \cdot h(b) = -(f(a) - f(b))^2$$

luego por TVI $\exists x_0 \in [a, b]$ tal que $h(x_0) = 0$, es decir,

$$f(x_0) = -g(x_0).$$

b) Cosiderar F y G continuas en x_0 tales que $F(x_0) < G(x_0)$. Demuestre que existe $\delta > 0$ tal que $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $F(x) < G(x)$.

Solución.- Consideramos primero el caso $F \equiv 0$, asi sólo tenemos que G es continua en x_0 tal que $0 < G(x_0)$.

Sea $\epsilon = \frac{G(x_0)}{2}$, por la continuidad existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |G(x) - G(x_0)| < \epsilon$$

con lo cual

$$\text{si } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \text{ entonces } 0 < G(x)$$

Ahora, para F y G generales que cumplen lo del enunciado, definimos $\widehat{G}(x) = G(x) - F(x)$ con lo cual volvemos al caso anterior.