MA1A2 Cálculo Diferencial e Integral. Semestre 2008-02
Profesor: Raúl Uribe
Auxiliares: Cristóbal Quiñinao - Renato Valenzuela

Solución Problemas Semana I

19 de Agosto de 2008

Problemas

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función continua y supongamos que $c \in \mathbb{R}$ es tal que $f(x) < 0$ para $x < c$ y $f(x) > 0$ para $x > c$. Demuestre que $f(c) = 0$.

   Solución.- Supongamos que $f(c) > 0$ (en caso $f(c) < 0$ es similar por lo cual queda propuesto), intentaremos llegar a una contradicción. Recordemos que por la caracterización $\varepsilon - \delta$ de continuidad en un punto se tiene lo siguiente
   $$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon)$$
   luego como $f(c)$ lo suponemos positivo sea $\varepsilon_0 = \frac{f(c)}{2}$. Tenemos que existe $\delta > 0$ tal que para $x \in (c-\delta, c+\delta)$ se tiene que
   $$|f(x) - f(c)| < \varepsilon_0 = \frac{f(c)}{2}$$
   luego
   $$-\frac{f(c)}{2} < f(x) - f(c) < \frac{f(c)}{2}$$
   que es lo mismo que
   $$\frac{f(c)}{2} < f(x) < \frac{3f(c)}{2}.$$
   Notemos que tenemos una contradicción pues para $x < c$ se tiene que $f(x) < 0$ pero hemos deducido que para todo x suficientemente cercano a c se cumple que
   $$0 < \frac{f(c)}{2} < f(x).$$

2. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y supongamos que existe $L \geq 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ para todo $x, y \in A$. Probar que f es continua en A.

   Solución.- Nuevamente usamos la caracterización de continuidad $\varepsilon - \delta$. Sea $\epsilon > 0$ cualquiera debemos encontrar $\delta > 0$ tal que
   $$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$
   Tenemos dos casos dependiendo del valor de L

   a) Si $L = 0$ entonces tenemos de la propiedad del enunciado
   $$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| = 0$$
   esto es $\forall x, y \in A$
   $$|f(x) - f(y)| = 0$$
   luego $f(x) = f(y)$ es decir la función es constante y por consiguiente continua en A.

b) Si $L > 0$ entonces definimos $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ y con ello se tiene que si $|x-y| < \delta$ entonces

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y| \leq L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$$

y listo.

3. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $r_n > 0$ sucesión tal que $r_n \to 0$. Probar que f es continua en x^* ssi[1] la sucesión

$$s_n := \sup_x \{|f(x) - f(x^*)| : |x - x^*| \leq r_n\}$$

converge a cero.

Solución.-

$\Rightarrow$ Suponemos que f es continua en x^* luego sea $\varepsilon_0 > 0$, de la continuidad existe $\delta_0 > 0$ tal que si $|x - x^*| < \delta_0$ entonces $|f(x) - f(x^*)| \leq \varepsilon_0$.

Ahora como $r_n \to 0$ entonces para $\delta_0 > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n \geq n_0$ se tiene que $r_n < \delta_0$. Así tenemos que si $n \geq n_0$ entonces

$$|x - x^*| \leq r_n \Rightarrow |x - x^*| \leq \delta_0$$

así

$$|f(x) - f(x^*)| \leq \varepsilon_0,$$

con lo cual se deduce que dado $\varepsilon_0 > 0$

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall\, n \geq n_0) \;\; s_n \leq \varepsilon_0,$$

es decir, (s_n) converge a cero.

$\Leftarrow$ Si s_n converge a cero, entonces

$$|f(x) - f(x^*)| \to 0$$

si $|x - x^*| \leq r_n \to 0$. Así deducimos que $f(x) \to f(x^*)$.

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función definida por $f(x) = \frac{1}{q}$ si $x = \frac{p}{q}$ con $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ con $|p|$ y q primos relativos, y $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$. Probar que f es continua en todo punto $x \notin \mathbb{Q}$ y discontinua en $x \in \mathbb{Q}$.

Solución.- Solo probaremos que es discontinua en $x \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$, suponemos que $x = \frac{p}{q}$ con ello

$$f(x) = \frac{1}{q} \neq 0$$

pero tomando la sucesión

$$s_n = \frac{p}{q} + \frac{\pi}{n}$$

es tal que $s_n \notin \mathbb{Q}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, $s_n \to x$ y por ende

$$f(s_n) = 0 \to 0 \neq \frac{1}{q} = f(x)$$

lo cual hace imposible la continuidad en $\mathbb{Q}\backslash\{0\}$.

La continuidad en los otros puntos se desarrolla por contradicción, no es sencilla y no aporta mucho al curso, para los que estén interesados se las explico en la siguiente clase auxiliar.

[1] ssi = si y solo si

5. Se hace igual al problema 1
6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función continua. Probar que si $f(x+y) = f(x) + f(y)$ entonces $f(x) = ax$ con $a = f(1)$.

   Solución.- Vamos por casos:

   - Para $n \in \mathbb{N}$ se tiene (aplicando la propiedad inductivamente)

   $$f(n) = f(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n-veces}) = f(1) + \ldots + f(1) = nf(1)$$

   - Notar que se tiene que

   $$f(0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

   luego

   $$f(n-n) = f(n) + f(-n) = 0 \Rightarrow f(-n) = -f(n) = -nf(1)$$

   Con ello la propiedad queda demostrada para todo $x \in \mathbb{Z}$.
   - Si tenemos $x \in \mathbb{Q}$ se tiene que $x = \frac{p}{q}$ luego notemos lo siguiente

   $$f(p) = f\left(q \cdot \frac{p}{q}\right) = \underbrace{f\left(\frac{p}{q}\right) + \ldots + f\left(\frac{p}{q}\right)}_{q-veces} = q \cdot f\left(\frac{p}{q}\right)$$

   como $p \in \mathbb{Z}$ sigue por lo anterior que $f(p) = p \cdot f(1)$ y con ello

   $$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q} \cdot f(1)$$

   - Finalmente usamos la continuidad, si $x \notin \mathbb{Q}$ entonces al menos existe una sucesión $(x_n) \subseteq \mathbb{Q}$ tal que $x_n \to x$, luego por todo lo que hemos hecho hasta ahora

   $$f(x_n) = x_n f(1)$$

   y tomando límite, de la continuidad

   $$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(x)$$

   pero además

   $$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n f(1) = x \cdot f(1)$$

   y listo.

Nota: A eso me refería con los problemas emblemáticos, los que faltan son copiar lo hecho hasta ahora. ¡Nos vemos!