IN7R9 Teoría de Juegos y Economía de la Información — Profesor: Juan Escobar

Primavera 2016 — Auxiliar: Patricio Foncea

Tarea 1

Entrega: Lunes 15 de agosto a las 11:00am con Olga Barrera

1. Considere un modelo de Cournot en el que N firmas tienen costos marginales iguales a $c \geq 0$ y enfrentan una demanda $P(Q) = a - Q$, con $a > c$. Sea $q^{EN} \geq 0$ la cantidad que cada firma produce en el unico EN del juego. Suponga que el juego es infinitamente repetido con monitoreo perfecto, y factor de descuento $\delta \in]0,1[$.

   a. Para $\bar{q} > 0$ considere estrategias gatillo $\sigma^{\bar{q}}$ tal que en el camino del juego todas las firmas juegan $\bar{q}$ y desviaciones se castigan con reversión al equilibriu de Nash. Muestre que para todo $\delta > 0$, las firmas siempre pueden coludise (quiza de manera imperfecta). Es decir, muestre que para todo $\delta > 0$ existe $\bar{q} < q^{EN}$ tal que $\sigma^{\bar{q}}$ es un EPS.

   b. Sea Q^M la cantidad total monopólica y suponga $N = 2$. Encuentre el factor de descuento $\bar{\delta}$ de modo que para todo $\delta > \bar{\delta}$, estrategias gatillo tienen como resultado de equilibrio a cada firma fijando una cantidad $Q^M/2$.

   c. Encuentre el factor de descuento $\hat{\delta}$ de modo que para todo $\delta > \hat{\delta}$, estrategias de garrote-zanahoria tienen como resultado de equilibrio a cada firma fijando una cantidad $Q^M/2$. Para definir las estrategias garrote-zanahoria, suponga que las firmas castigan una desviación con un garrote (simétrico) $q^G < q^{EN}$ durante un periodo, y luego vuelven a la fase cooperativa. Encuentre q^G de modo tal que $\hat{\delta}$ sea lo menor posible. Suponga $N = 2$.

2. Considere un conjunto $\{1, \ldots, N\}$, con $N \geq 3$, de amigos que juegan el siguiente juego de favores. En cada $t \in \{1, \ldots, N\}$, el jugador t decide si hacerle o no un favor al jugador $t+1$ (si $t = N$ entonces el jugador N decide si hacerle o no un favor al jugador 1). De este modo, el conjunto de acciones del jugador que mueve en la ronda t es $\{F, NF\}$ (F si hace favor, NF si no lo hace). El costo de hacer el favor es igual a $c > 0$ para el habitante t, pero el habitante $t+1$ (o 1 si $t = N$) que recibe el favor tiene un beneficio igual a $v > 0$. Los amigos descuentan pagos a tasa $\delta < 1$. Por ejemplo, si todos los amigos hacen favores el vector de pagos es
$$(-c + \delta^{N-1}v, (v - \delta c), \delta(v - \delta c), \ldots, \delta^{N-2}(v - \delta c))$$
si el jugador 1 es el único que hace el favor el vector de pagos es $(-c, v, 0, \ldots, 0)$ y si sólo N hace el favor los pagos son $(\delta^{N-1}v, 0, \ldots, 0, -\delta^{N-1}c)$. El juego es de información perfecta. Suponemos que $v - \delta c > 0$.

   a. Describa el conjunto de estrategias de cada jugador.

   b. Calcule todas las soluciones de inducción reversa.

   c. Sea $\sigma = (\sigma_i)_i$ un perfil de estrategias. Defina $h^\sigma \in \{F, NF\}^N$ como la historia que resulta una vez que el juego se ha jugado con los jugadores usando la estretagia σ. Muestre que si σ es un EN, entonces $h^\sigma = (NF, \ldots, NF)$.

   En lo que sigue, suponga ahora que el juego es infinitamente repetido de modo que en cada $t \geq 1$ de la forma $t = nN + m$, donde $n \in \mathbb{N}$ y $m = m(t) \in \{1, \ldots N\}$, el jugador m decide si hacerle o no un favor al jugador $m+1$ (si $m = N$ el favor se lo hace al jugador 1).

d. Considere un subjuego en t donde i debe jugar (decidir si hace o no hace el favor). Encuentre un EPS en cualquier subjuego de la ronda $t+1$ que minimiza el pago total de equilibrio del jugador i.

e. Muestre que el juego tiene un EPS en el que en cada ronda se hace el favor ssi

$$(v-\delta c)\frac{\delta^N}{1-\delta^N} \geq \delta c.$$

HINT: Use la parte d.

f. Explique por qué es más difícil que haya cooperación cuando N crece.

3. Considere un equipo de dos jugadores que en cada ronda juegan el siguiente dilema del prisionero:

	C	D
C	$2,2$	$-1{,}3$
D	$3,-1$	$0{,}0$

La tecnología de monitoreo es tal que en cada ronda se genera una señal $y \in \{\bar{y}, \underline{y}\}$

$$\pi(\bar{y}, a) = \begin{cases} p & \text{si } a = CC \\ q & \text{si } a = CD \text{ o } a = DC \\ r & \text{si } a = DD \end{cases}$$

con $0 < r < q < p < 1$. El factor de descuento es $\delta < 1$ y nos restringimos al estudio de estrategias públicas.

(a) Consideramos estrategias de memoria finita. Sea σ^i una estrategia para el jugador i tal que i juega C en el periodo t si la señal en $t-1$ es $y^{t-1} = \bar{y}$, mientras que juega D en la ronda t si la señal en $t-1$ es $y^{t-1} = \underline{y}$. Muestre que estas estrategias son un equilibrio ssi

$$\frac{1}{3p-2q-r} \leq \delta \leq \frac{1}{p+2q-3r} \tag{0.0.1}$$

(b) Muestre que cuando q es cercano a p, las estrategias no pueden ser de equilibrio. Explique.

(c) Encuentre un conjunto autogenerante W tal que $(0,0) \notin W$, cuando la condición (0.0.1) se tiene.

4. **La monarquia como norma social** Considere una comunidad de N miembros, con N par. En cada $t \geq 1$, cada jugador i se aparea con un jugador $j \neq i$ de manera aleatoria y uniforme. Más formalmente, una función de emparejamiento es $m\colon \{1,\ldots,N\} \to \{1,\ldots,N\}$ tal que $m(i) \neq i$ y $[m(i) = j$ implica que $m(j) = i]$. En cada t, se decide aleatoria y uniformemente una función de emparejamiento m^t (que es observada por todos los miembros) de modo que si $m^t(i) = j$, entonces i y j juegan el siguiente dilema del prisionero: con $l, g > 0$. Las funciones de emparejamiento $(m^t)_{t\geq 1}$ se realizan independientemente. El juego es de monitoreo perfecto: cada jugador observa la historia previa de jugadas en sus interacciones y de las de los otros jugadores. El factor de descuento es $\delta < 1$.

	C	D
C	$1,1$	$-l,1+g$
D	$1+g,-l$	$0,0$

a. Suponga que $N = 2$. Encuentre una condición necesaria y suficiente para que haya cooperación en el camino del equilibrio de un EPS.

b. Suponga que $N \geq 4$. Encuentre una condición necesaria y suficiente para que cooperación ocurra en el camino del equilibrio de un EPS.

c. Solo por esta parte, suponga que la función de monitoreo no se realiza de manera uniforme de modo que hay algunos pares que son más probables. Repita la parte b del problema.

   En lo que sigue, exploramos la posibilidad de que la comunidad sostenga normas con altos niveles de desigualdad en las que unos pocos disfrutan pagos altos y otros pagos bajos. Por simplicidad, suponemos que $N = 4$ y nos interesamos en una norma que tiene al jugador 1 como favorecido, o rey, y al resto como no favorecido, o sirviente. Consideramos un resultado (outcome) desigual en el que el jugador 1 juega siempre D, mientras que los jugadores 2, 3, y 4, juegan siempre C.

d. Puede existir $\bar{\delta} < 1$ tal que para todo $\delta > \bar{\delta}$, existe un EPS cuyo camino del equilibrio coincide con el resultado desigual detallado arriba? Explique intuitivamente el equilibrio encontrado.

e. Puede haber un equilibrio con 2 reyes y 2 sirvientes? Contraste su respuesta con lo encontrado en d. Explique.

5. Considere el siguiente modelo de generaciones traslapadas. Agentes $t = 0, 1, \ldots$ escogen una acción $a_t \in \{0, 1\}$ secuencialmente, observando todas las acciones de los agentes que movieron previamente. El pago del agente t es $va_{t+1} - ca_t$, donde $v > c > 0$

   (a) Muestre que existe un equilibrio en el cual $a_t = 1$ se juega en cada t.

   (b) Suponga ahora que cada agente t solo observa la acción del agente $t-1$. Muestre que en cualquier equilibrio en estrategias puras del modelo, 0 se juega en cada ronda. Explique.

   (c) (OPCIONAL) Qué ocurre si consideramos estrategias mixtas? Puede existir cooperación entre las distintas cohortes? Explique.

6. (OPCIONAL) Considere un juego repetido entre un agente y un principal. En cada periodo t, el agente escoge esfuerzo $e_t \in \{0, 1\}$ que no es observable por el principal. El esfuerzo determina un producto $y_t \in \{0, 1\}$ que es observable solo por el principal. Es decir, en este modelo, las evaluaciones y_t son subjetivas y no son observables por el agente. La probabilidad con la que $y_t = 1$ es pe_t, con $0 < p < 1$. El principal escoge una transferencia $b_t \geq 0$ para dar al agente, y una cantidad $\tau_t \geq 0$ para botar a la basura. Los pagos en el periodo t son $b_t - ce_t$ para el agente, y $y_t - b_t - \tau_t$ para el principal. Asuma que $p > c$ de modo que $e_t = 1$ es eficiente y que los juagdores tienen un factor de descuento igual a $\delta < 1$.

   (a) Restrinja atención a contratos estacionarios en los cuales, en el camino del equilibrio, el agente escoge $e_t = 1$ y los pagos son funcione $b(y_t)$, $\tau(y_t)$ de la evaluación subjetiva y_t. Muestre que si $\delta < \frac{c}{p^2}$, entonces no existe un contrato como el descrito que sea de equilibrio.

(b) Considere ahora el siguiente contrato. El agente escoge $e = 1$ en cada periodo, el agente paga $b = c/p$ si $y = 1$ y bota $\tau = c/p$ si $y = 0$. Muestre que si $\delta \geq c/p^2$, el contrato implícito es de equilibrio.

(c) Por qué en la relación se botan recursos (money burning) τ_t con probabilidad positiva en el camino del equilibrio?