Definamos nuestra función de costo

$$C(Q,D)=\begin{cases} C_u(D-Q) & \text{si } D\geq Q \\ C_o(Q-D) & \text{si } D\leq Q \end{cases}$$

Buscaremos el valor de Q que minimiza el costo esperado.

$$\mathbb{E}\left[C(Q,D)\right] = \int_0^\infty C(Q,t)f_D(t)dt = \int_0^Q C(Q,t)f_D(t)dt + \int_Q^\infty C(Q,t)f_D(t)dt = C_o\int_0^Q (Q-t)f_D(t)dt + C_u\int_Q^\infty (t-Q)f_D(t)dt$$

$$= C_o\int_0^Q (Q-t)f_D(t)dt + C_u\left[\underbrace{\int_0^\infty (t-Q)f_D(t)dt}_{\mathbb{E}(D-Q)} - \int_0^Q (t-Q)f_D(t)dt\right] = C_o\int_0^Q (Q-t)f_D(t)dt + C_u\left[\mathbb{E}(D)-Q-\int_0^Q (t-Q)f_D(t)dt\right]$$

$$= C_o\left[Q\int_0^Q f_D(t)dt - \int_0^Q t f_D(t)dt\right] + C_u\left[\mathbb{E}(D) - Q - \int_0^Q t f_D(t)dt + Q\int_0^Q f_D(t)dt\right]$$

Derivamos con respecto a Q, para esto recordemos que:

$$\rho(x) = \int_0^x h(t)dt \Rightarrow \rho'(x) = h(x) \qquad (\text{cuando } h:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R})$$

$$\frac{\partial\mathbb{E}(C(Q,D))}{\partial Q} = C_o\left[\int_0^Q f_D(t)dt + \cancel{Q\cdot f_D(Q)} - \cancel{Q f_D(Q)}\right] + C_u\left[0 - 1 - \cancel{Q f_D(Q)} + \left(\int_0^Q f_D(t)dt + \cancel{Q\cdot f_D(Q)}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\mathbb{E}(\cdot)}{\partial Q} = C_o\int_0^Q f_D(t)dt - C_u + C_u\int_0^Q f_D(t)dt = 0 \qquad (\text{C.P.O.})$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_0^Q f_D(t)dt}_{\mathbb{P}(D\leq Q)} = \frac{C_u}{C_u+C_o}$$

Para ver que es mínimo:

$$\frac{\partial^2\mathbb{E}(\cdot)}{\partial Q^2} = C_o\cdot f_D(Q) + C_u f_D(Q) \geq 0 \quad //$$

Pues $f_D(x)\geq 0 \ \forall x$ y $C_u, C_o > 0$

P2

VENTAS PERDIDAS = MAX(D − Q, 0)

$$E(\text{Ventas Perdidas}) = \int_0^{\infty} MAX(t-Q,0) f_D(t)\,dt = \int_Q^{\infty} (t-Q) f_D(t)\,dt = \int_Q^{\infty} \left(\frac{t-\mu}{\sigma} - \frac{Q-\mu}{\sigma}\right)\sigma \cdot f_D(t)\,dt$$

Usando $X = \dfrac{t-\mu}{\sigma} \Rightarrow dX = \dfrac{dt}{\sigma}$ y $f_D(t) = \dfrac{1}{\sigma}\cdot \phi(x)$ } Propiedad de la Normal

$\phi(x)$ es la densidad de una $N(0,1)$

$$\Rightarrow E(\text{Ventas Perdidas}) = \sigma \int_{\frac{Q-\mu}{\sigma}}^{\infty} \left(x - \frac{Q-\mu}{\sigma}\right)\cdot \sigma \cdot \frac{1}{\sigma}\cdot \phi(x)\,dx$$

Y como $Z = \dfrac{Q-\mu}{\sigma}$, se tiene:

$$E(\text{Ventas Perdidas}) = \sigma \underbrace{\int_Z^{\infty} (x-z)\,\phi(x)\,dx}_{:= L(z)}$$

A esto le llamamos Loss function y representa las ventas perdidas de una Normal(0,1)

---

o

Ahora, sabiendo que $\phi'(x) = -x\,\phi(x)$ (Propiedad de la Normal)

$$L(Z) = \int_Z^{\infty} (x-z)\,\phi(x)\,dx = \int_Z^{\infty} x\,\phi(x)\,dx - Z\int_Z^{\infty} \phi(x)\,dx = -\int_Z^{\infty} \phi'(x)\,dx - Z\int_Z^{\infty} \phi(x)\,dx$$

$$= -\phi(x)\Big|_{x=z}^{x\to\infty} - Z\left(1 - \int_{-\infty}^{Z} \phi(x)\,dx\right)$$

$$= -\left(0 - \phi(z)\right) - Z\left(1 - \Phi(x)\right)$$

$$= \phi(z) - Z\left(1 - \Phi(x)\right)$$

Densidad de la Normal(0,1)

Acumulada Normal(0,1) $\left(\Phi(x) = \mathbb{P}(N(0,1) \le x) \text{ y } \Phi'(x) = \phi(x)\right)$

¿De qué sirve?

→ Excel no calcula la integral del principio, pero sí tiene incorporadas las funciones ϕ y Φ.

$\phi(x)$ = DISTR.NORM.N (x; μ; σ; 0)

$\Phi(x)$ = DISTR.NORM.N (x; μ; σ; 1)

P3

Resumen:

$$\boxed{\mathbb{E}(\text{Ventas Perdidas}) = \sigma \cdot L(z)}$$

Demanda = Demanda satisfecha + Demanda insatisfecha

$\Rightarrow$ Demanda = Ventas + Ventas perdidas $\quad / \mathbb{E}(\cdot)$

$$\Rightarrow \mu = \mathbb{E}(\text{Ventas}) + \mathbb{E}(\text{Ventas perdidas})$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{E}(\text{Ventas}) = \mu - \sigma L(z)}$$

$$\underbrace{\text{Inventario}}_{Q} = \text{Ventas} + \text{Sobras}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{E}(\text{Sobras}) = Q - \mathbb{E}(\text{Ventas})}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(\text{Utilidad}) = \underbrace{(p-c)}_{\substack{\text{Margen} \\ \text{de ganancia}}}\mathbb{E}(\text{Ventas}) - \underbrace{(c-v)}_{\substack{\text{Costo de} \\ \text{liquidar} \\ \text{a precio} \\ \text{menor que} \\ \text{el costo}}}\mathbb{E}(\text{Sobras})}$$

$$\boxed{\text{Fill Rate} = \frac{\mathbb{E}(\text{Ventas})}{\mu} = 1 - \frac{\sigma \cdot L(z)}{\mu}}$$

---

1. $\mu = 10.000$, $\sigma = 3.500$ $\quad p = 1.2c$, $\quad V = 0.4c$

$$CV_D = \frac{\sigma}{\mu} = 0.35 \quad ; \quad CV_{exp(\lambda)} = \frac{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}}}{\frac{1}{\lambda}} = 1$$

(Toda exponencial tiene coef. de variación igual a 1!)

Esto significa que la demanda no es tan dispersa con respecto a su media como la exp. (Ver el foro para una explicación detallada)

2. $C_u = P - C = 0.2C$; $C_o = C - V = 0.6C \Rightarrow \underset{\text{CRÍTICO}}{\text{RATIO}} = \frac{C_u}{C_o + C_u} = \frac{0.2}{0.8} = 0.25$

BUSCAMOS UN Q TAL QUE $\mathbb{P}(D \leq Q) = 0.25$ (NEWSVENDOR PL.)

RECORDANDO QUE $\mathbb{E}(X - cte) = \mathbb{E}(X) - cte$ Y $\mathbb{V}\text{AR}(\alpha X) = \alpha^2 \mathbb{V}\text{AR}(X)$

VEMOS QUE $\frac{D - 10.000}{3500} \sim N(0,1)$.

LUEGO $\mathbb{P}(D \leq Q) = \mathbb{P}\left(\frac{D - 10.000}{3500} \leq \underbrace{\frac{Q - 10.000}{3500}}_{\text{LLAMEMOS A ESTO } Z}\right) = \mathbb{P}(N(0,1) \leq Z)$

BUSCAMOS EN LA TABLA EL Z QUE HACE QUE $\mathbb{P}(N(0,1) \leq Z) = 0.25$

$\Rightarrow Z = -0.68 \Rightarrow Q = 10000 - 0.68 \cdot 3500 = 7620$.

¿POR QUÉ PEDIMOS MENOS QUE EL PROMEDIO DE LA DEMANDA?
COMO $C_o > C_u$, PREFERIMOS QUE NOS FALTE A QUE NOS SOBRE.

PARA CALCULAR LAS UTILIDADES USAMOS:

$$\mathbb{E}(\text{UTILIDADES}) = (p - c)\mathbb{E}(\text{VENTAS}) - (c - v)\mathbb{E}(\text{SOBRAS})$$
$$= 0.2C \cdot (\mu - \sigma L(z)) - 0.6C \cdot (Q - \mathbb{E}(\text{VENTAS}))$$

COMO USAMOS $Z = -0.68$ Y $Q = 7620$

$$\mathbb{E}(\text{UTILIDADES}) = 0.2C(10.000 - 3500 \cdot \underbrace{L(-0.68)}_{\text{VER TABLA}}) - 0.6C(7620 - \mathbb{E}(\text{VENTAS}))$$
$$= 0.2C \cdot 7102 \qquad - 0.6C(7620 - 7102)$$
$$= 1420.4C - 310.8C = 1109.6C$$

PERO NO CONOCEMOS $C \Rightarrow \frac{\mathbb{E}(\text{UTILIDADES})}{\text{COSTO DE PROD.}} = \frac{1109.6C}{7620C} = 14\%$ } ROI. POR CADA PESO INVERTIDO, GANO 0.14

3. AHORA QUEREMOS $\mathbb{P}(D \leq Q) = 0.95$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\frac{D-10.000}{3500} \leq \underbrace{\frac{Q-10.000}{3500}}_{Z}\right) \leq 0.95$$

$$\Rightarrow Z = 1.64 \quad Y \quad Q = 10.000 + 3500 \cdot 1.64$$

$$\mathbb{E}(\text{VENTAS}) = 10.000 - 3500 \cdot L(1.64)$$
$$= 10.000 - 3500 \cdot 0.021 = 9927$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(\text{UTILIDADES}) = (p-c)(9927) - (c-v)(15740 - 9927)$$
$$= 0.2c(9927) - 0.6c(15740 - 9927)$$
$$= -1503c$$

$$\Rightarrow ROI = \frac{-1503c}{15740c} = -9.5\%$$

POR CADA PESO INVERTIDO <u>PIERDO</u> 0.095

VALE LA PENA ASEGURAR UN NIVEL DE SERVICIO ALTO ENTONCES?

DEPENDE. POR EJEMPLO, SI VENDEMOS PAN FRESCO EN UN SUPERMERCADO Y EN VARIAS OCASIONES LOS CLIENTES NO ENCUENTRAN CUANDO VAN, PRIMERO SE ENOJAN PORQUE QUEDAN CON HAMBRE Y NO TENDRÁN PARA EL DESAYUNO. SEGUNDO, DEJAN DE COMPRAR OTROS PRODUCTOS QUE DEJAN MÁS MARGEN Y SE LLEVAN CON EL PAN (QUESO, HUEVOS, JAMÓN, LECHE, ETC.) Y FINALMENTE DEJAN DE VENIR PORQUE EN OTRO LADO CREEN QUE ES MÁS PROBABLE ENCONTRARLO.

4. $\text{FILL RATE} = \dfrac{E(\text{VENTAS})}{\mu} = 1 - \dfrac{\sigma L(z)}{\mu}$

¡NO ES LO MISMO QUE EL NIVEL DE SERVICIO. VER EL FORO PARA UNA EXPLICACIÓN DETALLADA.

QUEREMOS $1 - \dfrac{\sigma \cdot L(z)}{\mu} = 0.95$

$\Rightarrow \quad 5\% \cdot \mu = \sigma \cdot L(z)$

$\Rightarrow 5\% \cdot \dfrac{10.000}{3500} = L(z)$

$\Rightarrow L(z) = 0.143$

$\Rightarrow z = 0.70$ (VER TABLA).

$\Rightarrow Q = 10.000 + 0.70 \cdot 3500$

$= 12450.$

$E(\text{VENTAS}) = \mu - \sigma L(z) = 10.000 - 3500 \cdot 0.143 = 9500$

$\Rightarrow E(\text{UTILIDADES}) = 0.2C \cdot 9500 - 0.6C \cdot 2950 = 130$

$\Rightarrow ROI = \dfrac{130C}{12450C} = 1.04\%$ } POR CADA PESO INVERTIDO GANO 0.01 o POR CADA DÓLAR GANO UN CENTAVO :(