IN3701 - Modelamiento y Optimización

Auxiliar Nº 2 - Modelamiento

Profesores: Fernando Ordoñez, Andreas Weise.
Auxiliares: Óscar Jara, Tomás Lagos, Camilo Levenier, Macarena Osorio.

Conceptos Claves:

- **Variables de Decisión:** Corresponden a todos los aspectos del problema, sobre los cuales se pueden tomar decisiones. Se intenta determinar sus valores mediante la resolución del problema.
- **Restricciones:** Son todas las características que cualquier solución debe tener, en particular la solución óptima. Estas ecuaciones son las que nos definirán el “conjunto” de soluciones que nos interesan.
- **Función Objetivo:** Corresponde al valor que se quiere optimizar, que es análogo a nuestro criterio para decidir cuál solución es mejor o peor.
- **Parámetro:** Son todas las partes exógenas del problema, es decir, que no pueden ser cambiadas o no dependen de las decisiones tomadas.

P1. Una empresa debe decidir donde localizar bodegas en J distritos y cuanto enviar desde la bodega a K clientes. La capacidad y el costo de la bodega depende de donde se localiza ésta y los denotaremos respectivamente por c_j y w_j. Cada cliente tiene una demanda d_k por el único prducto que fabrica la empresa. Además debe decidir cuánto enviar a cada bodega desde I fábricas, cada una con una capacidad de producción g_i. El costo de enviar una unidad de producto desde la bodega en el distrito j al cliente k tiene un costo u_{jk} y enviar una unidad de producto de la fábrica i a la bodega en el distrito j tiene un costo v_{ij}. Formule un PPL que resuelva el problema que enfrenta la empresa para minimizar sus costos satisfaciendo la demanda. Asuma que no existen tiempos de transporte de las unidades del producto (es decir todo se transporta instantaneamente), y suponga además para efectos del problema que no se debe guardar ningún inventario en las bodegas construidas (es decir la capacidad es de pasada).

Pauta Pregunta 1:

Variables de Decisión:

- x_j: 1 si se decide abrir la bodega en la ubicación $j \in J$, 0 en otro caso.
- y_{jk}: Flujo de producto desde la bodega $j \in J$ al cliente $k \in K$
- z_{ij}: Flujo de producto desde la fábrica $i \in I$ a la bodega $j \in J$

Restricciones:

Capacidad de las fábricas:

$$\sum_j z_{ij} \leq g_i \quad \forall i \in I$$

Capacidad de las bodegas:

$$\sum_i z_{ij} \leq c_j, \quad j \in J$$

Conservación de flujo:

$$\sum_i z_{ij} = \sum_k y_{jk} \quad \forall j \in J$$

Satisfacción de la demanda:

$$\sum_j y_{jk} \geq d_k \quad \forall k \in K$$

Relación entre flujos y apertura de plantas:

$$\sum_i z_{ij} \leq M \cdot x_j, \quad j \in J, \ M >> 1$$

Naturaleza de las Variables:

$$x_j \in \{0,1\}, \ \forall j \ \in J, \quad y_{jk} \in \mathbb{N}, \forall j, \forall k, \quad z_{ij} \in \mathbb{N}, \forall i, \forall j$$

Función objetivo:

$$\text{mín} \quad \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} v_{ij} \cdot x_{ij} + \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} u_{jk} \cdot y_{jk} + \sum_{j \in J} w_j \cdot z_j$$

P2. Un problema fundamental en el diseño urbano es la localización de servicios básicos como colegios, hospitales y áreas recreacionales. En este problema formularemos un modelo simplificado para decidir la localización de estaciones de bomberos en una ciudad.

La ciudad se puede dividir en I distritos, en que cada uno contiene p_i habitantes. Análisis preliminares (estudios de terrenos, factores políícos, etc.) han establecido que las estaciones de bomberos solo pueden ser ubicadas en J sitios predeterminados dentro de la ciudad. Sea $d_{ij} > 0$ la distancia desde el centro del distrito i hasta el sitio j. Se deben seleccionar los sitios en los cuales construir una estación (en un sitio cabe a lo más una) y además se debe asignar una estación a cada distrito. Es decir, cada distrito de la ciudad debe tener una (y solo una) estación de bomberos asociada. Una estación puede tener más de un distrito asociado. Construir una estación en el sitio j tiene un costo fijo asociado igual a c_j. Además, existe un costo variable que es linealmente proporcional (constante de proporcionalidad es f) a la cantidad total de gente que debe servir la estación. O sea, si se construye una estación en el sitio j, entonces el costo asociado es $c_j + f s_j$, en que s_j es la población total que debe servir la estación ubicada en j (es la suma de las poblaciones de todos los distritos asociados a esa estación). El presupuesto total destinado para construir las estaciones de bomberos es igual a B y no debe ser sobrepasado.

Formule un modelo de programación lineal que minimice la distancia máxima entre un distrito y su respectiva estación.

Pauta Pregunta 2:
Variables de Desición:

- $X_j = \begin{cases} 1, & \text{si se construye una estación en el sitio j, } j \in J \\ 0, & \text{si no se construye estación en el sitio j} \end{cases}$
- $Y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si se asocia el distrito i con el local ubicado en j, } j \in J, \, i \in I \\ 0, & \text{si no se asocia el distrito i con el local ubicado en j} \end{cases}$
- s_j = Cantidad de gente asociada a la estación j, $j \in J$
- z = Distancia máxima entre un distrito y su estacin asociada.

Restricciones:

1. Naturaleza de las variables:

$$X_j, Y_{ij} \in \{0,1\},\ s_j, z \in \mathbb{R}^+$$

2. Si se asigna una estación, ésta se debe construir:

$$X_j \geq Y_{ij},\ \forall\ j \in J,\ i \in I$$

3. Cada distrito debe tener una estación asignada:

$$\sum_{j \in J} Y_{ij} = 1,\ \forall i \in I$$

4. No se puede sobrepasar el presupuesto:

$$B \geq \sum_{j \in J} X_j * c_j + f s_j$$

5. Gente asociada a cada distrito:

$$s_j \geq \sum_{i \in I} Y_{ij} * p_i, \qquad \forall j \in J$$

6. Relación distancia máxima:

$$z \geq Y_{ij} * d_{ij}, \qquad \forall j \in J,\ i \in I$$

Funcion Objetivo:

$$\text{mín } z$$

P3. Una fábrica debe realizar N trabajos, los cuales para completarse deben ser procesados por M máquinas dispuestas en serie. Cada trabajo debe ser procesado en todas las máquinas, pasando siempre por la máquina 1, luego por la máquina 2, y así sucesivamente hasta terminar en la máquina M. Suponga además que los trabajos deben ser procesados en el mismo orden en todas las máquinas. El trabajo $n \in N$ requiere T_{nm} horas en ser procesado en la máquina $m \in M$. Plantee un problema de programación lineal para determinar el orden en que se deben procesar los trabajos, con el objetivo de minimizar el tiempo total de procesamiento.

Pauta Pregunta 3:
Para modelar este problema hay que considerar un grafo completo formado por $N+2$ nodos. Estos nodos corresponden a los N trabajos que hay que ordenar, indexados por $\{1,..,N\}$; y dos nodos adicionales que representan el inicio y el fin de la secuencia de ordenamiento, indexados por 0 y $N+1$ respectivamente. Se debe encontrar un "camino"que comienze en el nodo 0 y termine en el $N+1$, pase por todos los nodos y que sólo una vez entre y salga por cada nodo correspondiente a $\{1,..,N\}$. Esta secuencia corresponde al orden en que se procesan los trabajos. El objetivo del problema es encontrar la secuencia que requiere el mínimo de tiempo total de procesamiento y que cumpla con las restricciones anteriormente mencionadas.

Variables de Desición:

- $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el trabajo j se realiza inmediatamente después de i.} \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$
- t_{im} = tiempo de comienzo del trabajo i en la máquina m.
- tf_{KM} = tiempo de fin de del último trabajo en la última máquina.

Restricciones:

1. Naturaleza de las variables:

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall \{i,j\} \in \{0,..,N+1\}.$$

$$t_{im}, tf_{KM}, \in \mathbb{R}^{+} \quad \forall i \in \{1,..,N\}; \forall m \in \{1,..,M\}.$$

2. Definición del tiempo final:

$$t_{iM} + T_{iM} \leq tf_{KM} \quad \forall i \in \{1,..,N\}.$$

3. Relación entre los tiempos del mismo trabajo en máquinas consecutivas:

$$t_{im} + T_{iM} \leq t_{i(m+1)} \quad \forall i \in \{1,..,N\}; \forall m \in \{1,..,M\}.$$

4. Relación entre los tiempos de distintos trabajos en la misma máquina:

$$t_{im} + T_{im} - (1 - x_{ij})M \leq t_{jm} \quad \forall \{i,j\} \in \{1,..,N\}; \forall m \in \{1,..,M\}; M \gg 1.$$

5. Todos los trabajos tienen un sucesor:

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{N+1} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in \{1,..,N\}.$$

6. Todos los trabajos tienen un antecesor:

$$\sum_{i=0, i\neq j}^{N} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in \{1,..,N\}.$$

7. Hay un primer trabajo:

$$\sum_{j=1}^{N} x_{0j} = 1$$

8. Hay un último trabajo:

$$\sum_{i=1}^{N} x_{i(N+1)} = 1$$

Funcion Objetivo:

$$\min \; tf_{KM}$$

Pauta Pregunta 4:

a. **Variables de decisión**

- $X_{ij}^d = \begin{cases} 1 & \text{si construyo conexión directa entre i y j.} \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$
- $y_i^h = \begin{cases} 1 & \text{si contruyo un centro en.} i \in H \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$
- $z_{ij}^d = \begin{cases} 1 & \text{si contruyo conexión entre centros.} (i,j) \in H \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$
- w_{ij}^d = flujo directo enviado de $i \longrightarrow j$, $(i,j) \in V$.
- w_{ij}^h = flujo tipo hub enviado de $i \longrightarrow j$, $(i,j) \in H \times H$.

Restricciones

- No puedo contruir arcos *hub* sin centros construídos:

$$z_{ij}^h \leq y_i^h \qquad \forall (i,j) \in H \times H$$

- Capacidad arcos directos[1]:

$$w_{ij}^d + w_{ji}^d \leq k^d \cdot X_{ij}^d \qquad \forall (i,j) \in V \times V$$

- Capacidad arcos hub[2]:

$$w_{ij}^h + w_{ji}^h \leq k^h \cdot z_{ij}^h \qquad \forall (i,j) \in H \times H$$

- Satisfacer demanda:

$$w_{ij}^d \geq d_{ij} - M(1 - X_{ij}^d) \qquad \forall (i,j) \in V \times V$$
$$w_{ij}^h \geq d_{ij} - M(1 - z_{ij}^h) \qquad \forall (i,j) \in H \times H$$

- No puedo construir arcos hub si construyo arco directo y viceversa:

$$X_{ij}^d + z_{ij}^h \leq 1 \qquad \forall (i,j) \in H \times H$$

- Naturaleza de las variables:

$$X_{ij}^d, y_l^h, z_{ln}^h \in \{0,1\}, \qquad \forall (i,j) \in V \times V, \;\; (l,n) \in H \times H$$
$$w_{ij}^d, w_{ln}^h \geq 0 \qquad \forall (i,j) \in V \times V, \; (l,n) \in H \times H$$

El enunciado se puede interpretar de más de una forma. Si se asume que (1) pueden haber arcos directos y hubs en un mismo trazo y que (2) las demandas no son dirigidas, entonces las restricciones 2, 3, 4 y 5 cambian por:

[1]Notar que esta restricción también sirve para modelar que no puedo enviar flujo directo si no construyo camino directo (i,j)

[2]Notar que esta restricción también sirve para modelar que no puedo enviar flujo hub si no construyo camino hub (i,j)

- Capacidad arcos directos:
$$w_{ij}^d \leq k^d X_{ij}^d \quad \forall (i,j) \in V \times V$$
- Capacidad arcos hubs:
$$w_{ij}^h \leq k^d z_{ij}^h \quad \forall (i,j) \in H \times H$$
- Demanda:
$$w_{ij}^d + w_{ij} \geq d_{ij} \quad \forall (i,j) \in V \times V$$

Función Objetivo

$$\min \sum_{i,j \in V} X_{ij}^d c_{ij}^d + f_{ij}^d w_{ij}^d + \sum_{i \in H} y_i^h c^h + \sum_{i,j \in H} z_{ij}^h c_{ij}^h + f_{ij}^h w_{ij}^h$$

b. Como ahora no se nos pide satisfacer la demanda (sino que cada unidad de demanda servida tiene un beneficio b_{ij}) removemos la restricción de satistacción de demanda, e incorporamos los beneficios a la F.O.:

$$\text{máx} \left[\sum_{i,j \in H} b_{ij} w_{ij}^h + \sum_{i,j \in V} b_{ij} w_{ij}^d \right] - \left[\sum_{i,j \in V} X_{ij}^d c_{ij}^d + f_{ij}^d w_{ij}^d + \sum_{i \in H} y_i^h c^h + \sum_{i,j \in H} z_{ij}^h c_{ij}^h + f_{ij}^h w_{ij}^h \right]$$

c. Mantenemos todo el PPL anterior (parte b), pero incorporando una restricción presupuestaria para los costos fijos:

$$\sum_{i,j \in V} X_{ij}^d c_{ij}^d + \sum_{i \in H} y_i^h c^h + \sum_{i,j \in H} z_{ij}^h c_{ij}^h \leq B$$