IN3701 - Modelamiento y Optimización

Pauta Auxiliar Nº 5 - SIMPLEX

Profesores: Fernando Ordoñez, Andreas Weise.
Auxiliares: Oscar Jara, Tomás Lagos, Camilo Levenier, Macarena Osorio.

P1. Considere el siguiente problema de minimización:

$$
\begin{array}{lllllllll}
(P) & \min & -10x_1 & - & 12x_2 & - & 12x_3 & & \\
 & \text{s.a.} & x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & \leq & 20 \\
 & & 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 20 \\
 & & 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 20 \\
 & & \multicolumn{7}{l}{x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0}
\end{array}
$$

i) Resuelva el problema (P) utilizando el Algoritmo Símplex en su forma matricial.

ii) ¿Es posible que Símplex resuelva el problema en 2 iteraciones partiendo desde $(0,0,0)$, siguiendo por $(10,0,0)$ y finalizando en $(4,4,4)$?

Pauta Pregunta 1:

i) **Inicialización:**
Agregando variables de holgura, tenemos que el número de variables es $n = 6$ y el de restricciones es $m = 3$. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matriz de restricciones,

$$b = \big(20, 20, 20\big)^t$$

el lado derecho y

$$c = \big(-10, -12, -12, 0, 0, 0\big)^t$$

el vector de costos. Las variables de holgura nos entregan a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

como base, formada por las columnas A_4, A_5 y A_6. Los índices básicos y no básico son respectivamente

$$\mathcal{B} = \{4, 5, 6\}, \quad \mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$$

de modo que $B(1) = 4$, $B(2) = 5$ y $B(3) = 6$. El vector de variables básicas es

$$x_B = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$$

mientras que el vector de variables no básicas como siempre es igual a 0. Lo anterior quiere decir que partimos desde el punto $(0,0,0)$ del poliedro del problema original.

Iteración 1:

Calculamos los multiplicadores símplex

$$p^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Con ellos obtenemos los costos reducidos de las variables no básicas:

$$\bar{c}_1 = -10$$
$$\bar{c}_2 = -12$$
$$\bar{c}_3 = -12$$

y vemos que no son todos mayores que 0. Luego, la solución básica factible actual no es óptima. Los candidatos a entrar a la base son $\{1,2,3\}$. Escogemos a x_1 $(j=1)$. Calculamos

$$u = B^{-1}A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathcal{I} = \{1,2,3\}.$$

y con esto, obtenemos los cuocientes

$$\frac{x_{B(1)}}{u_1} = 20 \quad \frac{x_{B(2)}}{u_2} = 10 \quad \frac{x_{B(3)}}{u_3} = 10.$$

Los posibles valores de ℓ son $\{2,3\}$. Escogemos a la variable $x_{B(2)}$ $(\ell = 2)$ para que salga de la base. A continuación, actualizamos B:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con lo cual los índices cambian a $\mathcal{B} = \{4,1,6\}, \quad \mathcal{N} = \{5,2,3\}$. Luego, calculamos B^{-1}, que resulta ser

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Las variables básicas correspondientes a la nueva solución factible son entonces

$$x_B = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lo que significa que nos hemos movido al punto $(10,0,0)$. Notar que esta solución es degenerada.

Iteración 2:

Calculamos los multiplicadores símplex

$$p^t = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Con ellos obtenemos los costos reducidos de las variables no básicas:

$$\bar{c}_1 = 5$$
$$\bar{c}_2 = -7$$
$$\bar{c}_3 = -2$$

y vemos que no son todos mayores que 0. Luego, la solución básica factible actual no es óptima. Los candidatos a entrar a la base son $\{2,3\}$. Escogemos a x_3 $(j = 3)$. Calculamos

$$u = B^{-1}A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{I} = \{1,2\}.$$

y con esto, obtenemos los cuocientes

$$\frac{x_{B(1)}}{u_1} = 10 \quad \frac{x_{B(2)}}{u_2} = 10.$$

Los posibles valores de ℓ son $\{1,2\}$. Escogemos a la variable $x_{B(1)}$ $(\ell = 1)$ para que salga de la base. A continuación, actualizamos B:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

con lo cual los índices cambian a $\mathcal{B} = \{3,1,6\}$, $\quad \mathcal{N} = \{5,2,4\}$. Luego, calculamos B^{-1}, que resulta ser

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Las variables básicas correspondientes a la nueva solución factible son entonces

$$x_B = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

lo que significa que nos hemos movido al punto $(0,0,10)$.

Iteración 3:

Calculamos los multiplicadores símplex

$$p^t = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Con ellos obtenemos los costos reducidos de las variables no básicas:

$$\bar{c}_1 = 4$$
$$\bar{c}_2 = -4$$
$$\bar{c}_3 = 2$$

y vemos que no son todos mayores que 0. Luego, la solución básica factible actual no es óptima. El único candidato a entrar a la base es $\{2\}$. Escogemos a x_2 ($j = 2$). Calculamos

$$u = B^{-1}A_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \mathcal{I} = \{1, 3\}.$$

y con esto, obtenemos los cuocientes

$$\frac{x_{B(1)}}{u_1} = \frac{20}{3} \quad \frac{x_{B(3)}}{u_3} = 4.$$

El único posible valor de ℓ es $\{3\}$. Escogemos a la variable $x_{B(3)}$ ($\ell = 3$) para que salga de la base. A continuación, actualizamos B:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

con lo cual los índices cambian a $\mathcal{B} = \{3, 1, 2\}, \quad \mathcal{N} = \{5, 6, 4\}$. Luego, calculamos B^{-1}, que resulta ser

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Las variables básicas correspondientes a la nueva solución factible son entonces

$$x_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

lo que significa que nos hemos movido al punto $(4, 4, 4)$.

Iteración 4:

Calculamos los multiplicadores símplex

$$p^t = \begin{pmatrix} -\frac{18}{5} & -\frac{8}{5} & -\frac{8}{5} \end{pmatrix}$$

Con ellos obtenemos los costos reducidos de las variables no básicas:

$$\bar{c}_1 = \frac{8}{5}$$
$$\bar{c}_2 = \frac{8}{5}4$$
$$\bar{c}_3 = \frac{18}{5}$$

y vemos que no todos mayores que 0, lo que nos permite concluir que el punto

$$x = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wa óptimo del problema con variables de holgura y $(4,4,4)$ es óptimo para (P).

ii) La base inicial y la final difieren en 3 columnas, por lo que no es posible llegar a la solución en 2 iteraciones, requiere por lo menos tres.

P2. Condiciones de Optimalidad Considere el problema de minimización $c^t x$ en el poliedro P, pruebe lo siguiente:

(a) Una solución factible x es óptima ssi $c^t d \geq 0$, para toda dirección factible d en x.

(b) Una solución factible x es la única solución óptima ssi $c^t d > 0$ para toda dirección factible $d \neq 0$ en x.

Pauta Pregunta 2:

(a)

- $\Rightarrow$) Por contradicción. Sea x solución óptima ($c^t x \leq c^t y \ \forall y \in P$). Supongamos que existe d dirección factible tal que $c^t d < 0$.
  Sea $z \in P$, tal que $z = x + \theta d$, con $\theta > 0$. (todo $z \in P$ puede ser descrito como $z = x + \theta d$, ya que P es un conjunto convexo).
  Como x es óptimo, se tiene que $c^t x \leq c^t z \Rightarrow c^t x \leq c^t(x + \theta d) \Rightarrow c^t x \leq c^t x + \theta c^t d \Rightarrow 0 \leq \theta c^t d$.
  Como $\theta > 0$, se tiene que $0 \leq c^t d$. Lo cuál es una contradición.
  Luego toda dirección factible d en x (punto óptimo) cumple con $c^t d \geq 0$.

- $\Leftarrow$) Sea $x \in P$. Se tiene que $c^t d \geq 0 \ \forall d$ dirección factible en x.
  Sea $y \in P$ tal que $y = x + \theta d$, con $\theta > 0$.
  $c^t(y - x) = c^t(x + \theta d - x) = \theta c^t d \geq 0$ (ya que $\theta > 0$ y $c^t d \geq 0$).
  $\Rightarrow c^t(y - x) \geq 0 \Rightarrow c^t y \geq c^t x \Rightarrow x$ es solución óptima.

(b)

- $\Rightarrow$) Por contradicción. Sea x la única solución óptima ($c^t x < c^t y \ \forall y \in P$). Sea $\bar{d} \neq 0$ dirección factible en x, tal que $c^t \bar{d} \leq 0$.
  Sea $y \in P \backslash \{x\}$ tal que $y = x + \theta \bar{d}$, con $\theta > 0$. (todo $y \in P \backslash \{x\}$ puede ser descrito como $y = x + \theta \bar{d}$, ya que P es un conjunto convexo).
  $c^t \bar{d} \leq 0 \Rightarrow \theta c^t \bar{d} \leq 0 \Rightarrow c^t x + \theta c^t \bar{d} \leq c^t x \Rightarrow c^t(x + \theta \bar{d}) \leq c^t x \Rightarrow c^t y \leq c^t x$. Lo cuál es una contradicción.
  Luego toda dirección factible $\bar{d} \neq 0$ en x (único punto óptimo) cumple con $c^t \bar{d} > 0$.

- $\Leftarrow$) Sea $y, x \in P$ tal que $y \neq x$. Se tiene que $c^t \bar{d} > 0 \ \forall \bar{d} \neq 0$ dirección factible en x.
  Como P es un conjunto convexo se tiene que $y = x + \theta \bar{d}$, con $\theta > 0$.
  $c^t \bar{d} > 0 \Rightarrow \theta c^t \bar{d} > 0 \Rightarrow c^t x + \theta c^t \bar{d} > c^t x \Rightarrow c^t x + \theta c^t \bar{d} > c^t x \Rightarrow c^t(x + \theta \bar{d}) > c^t x \Rightarrow c^t y > c^t x \Rightarrow x$ es la única solución óptima.

P3. Condiciones de Unicidad del Óptimo Sea x una solución básica factible asociada con alguna matriz básica B, pruebe lo siguiente:

(a) Si el costo reducido de todas las variables no básicas es positivo, entonces x es la única solución óptima.

(b) Si x es la única solución óptima y es no degenerada, entonces el costo reducido de todas las variables no básicas es positivo.

Pauta Pregunta 3:

(a) Sea $y \neq x$ una solución factible arbitraria. Como el conjunto factible (poliedro en forma estantadar) es convexo se tiene que existe alguna dirección $d \neq 0$ tal que $y = x + d$.
Como $y \in P$, se tiene que $Ay = b \Rightarrow A(x + d) = b \Rightarrow Ax + Ad = b \Rightarrow b + Ad = b \Rightarrow Ad = 0$.
Lo anterior puede ser escrito de la siguiente forma:

$$Ad = \sum_{i=1}^{n} A_i d_i = \sum_{i \in \bar{B}} A_i d_i + \sum_{i \in \bar{N}} A_i d_i = B d_B + \sum_{i \in \bar{N}} A_i d_i = 0$$

En donde $\bar{B}$ y $\bar{N}$ son los conjuntos de indices básicos y no básicos, respectivamente.
Como la matriz B es invertible (por ser matriz básica), se tiene:

$$B d_B + \sum_{i \in \bar{N}} A_i d_i = 0 \Rightarrow d_B = -\sum_{i \in \bar{N}} B^{-1} A_i d_i$$

Por otro lado,

$$c^t d = c_B^t d_B + \sum_{i \in \bar{N}} c_i d_i = -c_B^t \sum_{i \in \bar{N}} B^{-1} A_i d_i + \sum_{i \in \bar{N}} c_i d_i = \sum_{i \in \bar{N}} (c_i - c_B^t B^{-1} A_i) d_i$$

Recordando que el costo reducido para la variable i corresponde a $\bar{c_i} = c_i - c_B^t B^{-1} A_i$, se tiene que:

$$c^t d = \sum_{i \in \bar{N}} \bar{c_i} d_i$$

Se tiene que $\bar{c_i} > 0 \ \forall i \in \bar{N}$. Por otro lado $d = y - x$, como x es solucion básica factible $x_i = 0 \ \forall i \in \bar{N} \Rightarrow d_i = y_i \ \forall i \in \bar{N}$. El vector $y \in P$, por lo que $y \geq 0 \Rightarrow d_i \geq 0 \ \forall i \in \bar{N}$.

Veamos que no se puede cumplir $d_i = 0 \ \forall i \in \bar{N}$. Por contradicción, sea $d_i = 0 \ \forall i \in \bar{N} \Rightarrow y_i = x_i = 0 \ \forall i \in \bar{N}$. Como $y \in P$ debe cumple $Ay = b$:

$$Ay = b \Rightarrow \sum_{i \in \bar{B}} A_i y_i + \sum_{i \in \bar{N}} A_i y_i = b \Rightarrow B y_B + \sum_{i \in \bar{N}} A_i y_i = b \Rightarrow B y_B = b$$

Como B es invertible, se tiene $y_B = B^{-1} b = x_b \Rightarrow y = x$, lo cual es una contradicción. Luego se debe cumplir que al menos un indice $i \in \bar{N}$ cumple con $d_i > 0$, con lo que se obtiene:

$$c^t d = \sum_{i \in \bar{N}} \bar{c_i} d_i > 0 \Rightarrow c^t (y - x) > 0 \Rightarrow c^t y > c^t x$$

Con lo que se demuestra que x es la única solución óptima.

(b) Por contradicción. Sea x la única solución óptima, además x es no degenerada y existe $j \in \bar{N}$ tal que $\bar{c_j} \leq 0$. La solución x cumple con $c^t x < c^t y \; \forall y \in P \backslash \{x\}$
Como x es no degenerada, la j-ésima dirección básica $\vec{d_j} \in \mathbb{R}^n$ es una dirección factible en x. Esto quiere decir que existe $\theta > 0$ tal que $x + \theta \vec{d_j} \in P$. Sea $y = x + \theta \vec{d_j}$.

$$c^t y = c^t(x + \theta \vec{d_j}) = c^t x + \theta c^t \vec{d_j} = c^t x + \sum_{i=1}^{n} \theta c_i d_i = c^t x + \sum_{i \in \bar{B}} \theta c_i d_i + \sum_{i \in \bar{N}} \theta c_i d_i = c^t x + \theta c_B d_B + \theta c_j =$$

$$= c^t x - \theta c_B B^{-1} A_j + \theta c_j = c^t x \theta (c_j - c_B B^{-1} A_j) = c^t x + \theta \bar{c_j}$$

Como $\theta > 0$ y $\bar{c_j} \leq 0$,se concluye que $c^t y \leq c^t x$. Lo cual es una contradicción, por lo que $\bar{c_j} > 0 \; \forall j \in \bar{N}$.