IN3701 - Modelamiento y Optimización

Auxiliar Nº 5 - SIMPLEX

Profesores: Fernando Ordoñez, Andreas Weise.
Auxiliares: Oscar Jara, Tomás Lagos, Camilo Levenier, Macarena Osorio.

P1. Considere el siguiente problema de minimización:

$$
\begin{array}{llrcrcrcl}
(P) & \min & -10x_1 & - & 12x_2 & - & 12x_3 & & \\
 & \text{s.a.} & x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & \leq & 20 \\
 & & 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 20 \\
 & & 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 20 \\
 & & \multicolumn{5}{l}{x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0} & &
\end{array}
$$

i) Resuelva el problema (P) utilizando el Algoritmo Símplex en su forma matricial.

ii) ¿Es posible que Símplex resuelva el problema en 2 iteraciones partiendo desde $(0,0,0)$, siguiendo por $(10,0,0)$ y finalizando en $(4,4,4)$?

P2. Condiciones de Optimalidad Considere el problema de minimización $c^t x$ en el poliedro P, pruebe lo siguiente:

(a) Una solución factible x es óptima ssi $c^t d \geq 0$, para toda dirección factible d en x.

(b) Una solución factible x es la única solución óptima ssi $c^t d > 0$ para toda dirección factible $d \neq 0$ en x.

P3. Condiciones de Unicidad del Óptimo Sea x una solución básica factible asociada con alguna matriz básica B, pruebe lo siguiente:

(a) Si el costo reducido de todas las variables no básicas es positivo, entonces x es la única solución óptima.

(b) Si x es la única solución óptima y es no degenerada, entonces el costo reducido de todas las variables no básicas es positivo.

Resumen

Algoritmo Símplex

Dados $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de rango m, $b \in \mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}^n$, el algoritmo símplex resuelve el problema

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad & c^t x \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

1. **Inicialización:**
   Encontrar una base factible B, cuyas columnas denotaremos por $A_{B(1)}, \dots, A_{B(m)}$.
   Definir índices básicos y no básicos: $\mathcal{B} := \{B(1), \dots, B(m)\}$, $\quad \mathcal{N} := \{1, \dots, n\} \setminus \mathcal{B}$.
   Calcular B^{-1}, $\quad x_B := B^{-1}b$, $\quad z := c_B^t x_B$.

2. **Test de optimalidad:**
   Calcular los multiplicadores símplex: $p^t := c_B^t B^{-1}$.
   Calcular los costos reducidos: $\bar{c}_j := c_j - p^t A_j \ \forall j \in \mathcal{N}$.
   Si $\forall\, j \in \mathcal{N},\ \bar{c}_j \geq 0$, terminar (estamos en el óptimo).
   Si no, sea $j \in \mathcal{N}$ tal que $\bar{c}_j < 0$.

3. **Test de factibilidad:**
   Calcular $u := B^{-1}A_j$.
   Calcular $\mathcal{I} := \{i \in \{1, \dots, m\} \bigm| u_i > 0\}$.
   Si $\mathcal{I} = \emptyset$, terminar (el problema es no acotado).
   Si no, calcular $\theta^* := \min\limits_{i\in\mathcal{I}} \frac{x_{B(i)}}{u_i}$ y $\ell \in \mathcal{I}$ tal que $\theta^* = \frac{x_{B(\ell)}}{u_\ell}$.

4. **Actualizar:**
   Formar una nueva base B reemplazando $A_{B(\ell)}$ por A_j en la base anterior.
   $\mathcal{B} := \mathcal{B} \setminus \{B(\ell)\} \cup \{j\}$, $\quad \mathcal{N} := \mathcal{N} \setminus \{j\} \cup \{B(\ell)\}$
   Decimos que x_j entra a la base y $x_{B(\ell)}$ sale de ella.
   $x_j := \theta^*$, $\quad x_{B(i)} := x_{B(i)} - \theta^* u_i$ para $i \neq \ell$.
   $z := z + \theta^* \bar{c}_j$.
   Calcular $B^{-1}(*)$.
   Ir a 2.

$(*)$ Símplex Revisado

El símplex revisado incorpora un procedimiento para calcular la inversa de la base de la siguiente iteración.

Sea B la base de una iteración y $\bar{B}$ la de la siguiente. Formar la matriz de dimensiones $m\times(m+1)$ $\left[B^{-1} \mid u\right]$. Agregar a cada una de sus filas un múltiplo de la fila ℓ-ésima para hacer que su última columna sea igual al vector e_ℓ. Las primeras m columnas de la matriz resultante corresponden a $\bar{B}^{-1}$, la inversa de la base de la siguiente iteración.