

Profesor: José Miguel Alvarado

10 de Noviembre

Auxiliares: Valeria Bustamente, Aníbal Cabbada, Carolina Galleguillos, Fabían Lema y Gonzalo Salazar

Pauta Auxiliar 6

Teoría de la Firma

Problemas

Problema 1. Comentes.

- (a) Que existan muchas firmas compitiendo en un mercado implica necesariamente que este mercado es competitivo.

Respuesta: Falso. La existencia de muchas firmas en un mercado es una de las condiciones que se requiere para que exista competencia perfecta, pero no es suficiente. Para esto, es necesario que las firmas compitan produciendo un bien homogéneo, que no existan costos de transacción, que la información sea perfecta y que no existan barreras de entrada ni de salida.

- (b) La función de producción tiene carácter ordinal, al igual que la función de utilidad en teoría del consumidor.

Respuesta: Falso. En teoría del consumidor, la función de utilidad ordena las canastas según cuáles son más o menos preferidas en términos relativos, pero el *output* de esta función no tiene ninguna interpretación. En teoría de la firma, en cambio, los *outputs* sí tienen interpretaciones en la realidad. La función de producción nos dice la cantidad máxima que puede producir una firma si demanda una cierta cantidad de factores productivos.

- (c) La relación marginal de sustitución técnica (RMST) nos indica cuánto capital está dispuesta a ceder la firma a cambio de trabajo (o viceversa) para mantener constantes sus beneficios.

Respuesta: Falso. La RMST es la pendiente de la curva de isocuanta, es decir, mide la relación a la que la firma puede sustituir capital y trabajo para mantener su cantidad de producción constante, no sus beneficios.

- (d) Las demandas óptimas de los factores productivos siempre estarán dadas por aquellas en que la firma obtiene la misma productividad marginal de ambos insumos.

Respuesta: Falso. Recordar que de las condiciones de primer orden se obtiene que:

$$\frac{PMg_L}{w} = \frac{PMg_K}{r}$$

Es decir, la firma demandará capital y trabajo en cantidades tales que la productividad marginal por peso gastado del último empleado contratado sea igual a la productividad marginal por peso gastado de la última unidad de capital utilizado.

Problema 2. Función de producción

Considere que la función de producción de una firma viene dada por:

$$F(K, L) = 25K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$$

donde K es la cantidad de capital y L es la cantidad de trabajadores empleados por la firma.

- (a) Calcule la productividad media y marginal de ambos factores en ésta firma. ¿Qué relación existe entre ambas?

Respuesta: El producto medio de un factor es la cantidad promedio producida por cada unidad del factor en cuestión, por lo tanto, la función de productividad media de cada factor viene dada por:

$$PMe_K = \frac{F(K, L)}{K} = \frac{25K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}}{K} = 25K^{-\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$$

$$PMe_L = \frac{F(K, L)}{L} = \frac{25K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}}{L} = 25K^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}$$

Por otro lado, el producto marginal de un factor es el aumento en la producción producto del aumento de la cantidad del factor en una unidad, en este caso, los factores son infinitamente divisibles, por lo tanto, será la tasa de cambio entre estas dos cantidades, es decir:

$$PMg_K = \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} = \frac{25}{2}K^{-\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$$

$$PMg_L = \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = \frac{25}{2}K^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}$$

Por lo tanto, podemos observar que:

$$PMg_K = \frac{1}{2}PMe_K$$

$$PMg_L = \frac{1}{2}PMe_L$$

- (b) ¿La ley de rendimientos marginales decrecientes se cumple?

Respuesta: La ley de rendimientos marginales decrecientes dice que, *ceteris paribus*, el incremento marginal de la producción disminuye a medida que se añade una unidad más del factor productivo.

Análiticamente, la función de producción marginal del factor es decreciente, por lo tanto, su derivada debe ser negativa:

$$\frac{\partial^2 F(K, L)}{\partial K^2} = -\frac{25}{4}K^{-\frac{3}{2}}L^{\frac{1}{2}} < 0 \quad \forall K > 0$$

$$\frac{\partial^2 F(K, L)}{\partial L^2} = -\frac{25}{4}K^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{3}{2}} < 0 \quad \forall L > 0$$

Por lo tanto, podemos concluir que la ley de rendimientos marginales decrecientes se cumple.

- (c) Calcule la relación marginal de sustitución técnica de capital por trabajo $RMST_{K,L}$, ¿tiene claro como se define esta relación?

Respuesta: La $RMST_{K,L}$ es la disminución de la cantidad de capital empleada cuando se utiliza una unidad extra de trabajo. En este caso, como los factores son infinitamente divisibles, será la tasa de cambio entre estas dos cantidades. Y es fácil ver que es equivalente a:

$$RMST_{K,L} = -\frac{\partial K}{\partial L} = \frac{PMg_L}{PMg_K}$$

Por lo tanto, la $RMTS_{K,L}$ viene dada por:

$$RMTS_{K,L} = \frac{\frac{25}{2}K^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}}{\frac{25}{2}K^{-\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}} = \frac{K}{L}$$

(d) Defina y derive las ecuaciones de isocuantas.

Respuesta: Las curvas de isocuantas representan las diferentes combinaciones de factores que proporcionan una misma cantidad de producción. Fijando una cantidad q de producción, podemos hallar la ecuación reemplazando en la función de producción:

$$q = 25K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}} \Rightarrow K(L) = \frac{q^2}{625L}$$

(e) Analice los rendimientos a escala que posee esta tecnología.

Respuesta: Los rendimientos a escala categorizan la intensidad en los cambios de la producción cuando todos los factores varían en la misma proporción.

Por lo tanto, veamos que sucede al variar los factores en una proporción λ :

$$F(\lambda K, \lambda L) = 25(\lambda K)^{\frac{1}{2}}(\lambda L)^{\frac{1}{2}} = \lambda^{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})}25K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}} = \lambda F(K, L)$$

Por lo tanto, la firma posee rendimientos constantes a escalas, lo cual sucede con todas las funciones de producción Cobb-Douglas homogéneas.

Problema 3. Costos

Para la función de producción del problema anterior:

(a) Calcule la función de costos a corto plazo si los precios de K y L son r y w respectivamente, con $K = 16$. Calcule además la función de costos medios y costos marginales.

Respuesta: Reemplazando en la función de producción, obtenemos la cantidad de factor a utilizar a un nivel de producción q :

$$q = 100L^{\frac{1}{2}} \Rightarrow L = \frac{q^2}{10.000}$$

Por otro lado, reemplazando en la función de costos a corto plazo (en función de los factores, necesitamos encontrarla en función del nivel de producción, ¡no confundir!) obtenemos que:

$$C(q) = 100r + w\frac{q^2}{10.000}$$

Finalmente, la función de costos medios, la cual nos entrega el costo unitario por producto, viene dada por:

$$CMe(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{100r}{q} + w\frac{q}{10.000}$$

Y la función de costos marginales, la cual nos entrega la variación en el costo total ante el aumento de una unidad en la cantidad producida, viene dada por:

$$CMg(q) = \frac{\partial C(q)}{\partial q} = w\frac{q}{5.000}$$

- (b) Calcule la función de costos a largo plazo si los precios de K y L son r y w respectivamente. Calcule además la función de costos medios y costos marginales.

Respuesta: De la condición de primer orden, se debe cumplir que:

$$\frac{PMg_K}{r} = \frac{PMg_L}{w}$$

Por lo tanto, se debe cumplir que:

$$L = \frac{r}{w}K$$

Reemplazando en la función de producción y despejando K obtenemos:

$$q = 25K^{\frac{1}{2}} \left(\frac{r}{w}K \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow K = \left(\frac{w}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{q}{25}$$

Reemplazando en la función de costos, obtenemos que:

$$C(q) = 2(rw)^{\frac{1}{2}} \frac{q}{25}$$

Finalmente, la función de costos medios viene dada por:

$$CMe(q) = \frac{2(rw)^{\frac{1}{2}}}{25}$$

Y la función de costos marginales viene dada por:

$$CMg(q) = \frac{2(rw)^{\frac{1}{2}}}{25}$$

Problema 4.

Demuestre que si en una firma la productividad media al factor es igual a la productividad marginal al factor entonces el gasto en capital y en trabajo es el mismo.

Respuesta: De la maximización de utilidades dada por:

$$\max_{K,L} pF(K, L) - (rK + wL)$$

Se deduce de las condiciones de primer orden que:

$$PMg_K = \frac{r}{p}$$

$$PMg_L = \frac{w}{p}$$

Igualando la productividad media con la marginal se obtiene que:

$$PMe_K = PMg_K \Rightarrow \frac{q}{K} = \frac{r}{p} \Rightarrow q = \frac{rK}{p}$$

$$PMe_L = PMg_L \Rightarrow \frac{q}{L} = \frac{w}{p} \Rightarrow q = \frac{wL}{p}$$

Finalmente igualando ambos q de la últimas ecuaciones obtenemos que:

$$rK = wL$$

Por lo tanto, el gasto que realiza la firma en capital y en trabajo es el mismo.