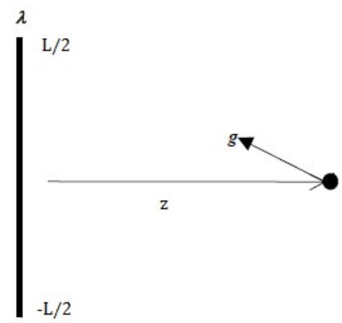
CONTROL 1
Geofísica general - GF3001

Prof. J. Campos; Aux. E. Medel
Sem. Primavera 2015; ***Tiempo: 2 hrs***

P1. Se requiere localizar una pieza de alambrón de cobre de longitud L y densidad lineal λ^* que se encuentra enterrada en una zona sedimentaria homogénea (densidad constante). Encuentre la expresión analítica de la anomalía de gravedad del alambrón asumiendo un contraste de densidad lineal λ con el medio y que la anomalía de gravedad producida por el alambrón corresponde a de una perturbación de densidad esencialmente lineal.

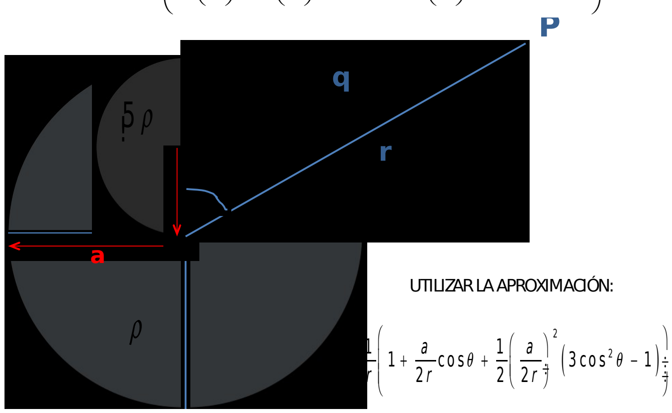


P2. En un planeta sin rotación, de radio "a" y densidad ρ se detectó un nucleo esférico de radio a/2 y densidad 5ρ centrado en el punto medio del semi-eje del hemisferio Norte del planeta.

(a) Demuestre que la masa del nucleo M'= M/2, (M es la masa media del planeta (1 pto)).
(b) Encuentre el potencial gravitacional en un punto P a una distancia r del planeta expresado en términos de M, la co-latitud θ y el radio "a" del planeta. (1 pto)
(c) Determinar J_0, J_1 y J_2 del planeta (2 ptos)
(d) Calcule g_r y g_θ en el Ecuador del planeta; (2 ptos)

Nota: Con θ como la co-latitud, la aproximación de 1er orden del potencial gravitacional en términos de armónicos esféricos es:

$$V = \frac{GM}{a}\left(J_0\left(\frac{a}{r}\right) + J_1\left(\frac{a}{r}\right)^2 \cos\theta + J_2 \frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^3 \left(3\cos^2\theta - 1\right)\right)$$



P3. **i)**¿Qué es el geoide?; **ii)** ¿qué es el elipsoide de referencia?; **iii)** ¿cuál de éstas presentas variaciones y por qué?; **iv)** Para un modelo de Tierra con densidad homogénea ρ, bosqueje un perfil de la anomalía de geoide para una esfera enterrada de densidad ρ0 < ρ y ρ0 > ρ; **v)** ¿Cuál de los planetas la Ley de Titus-Bode no se cumple?: a) Neptuno; b) Venus; c) Tierra; d) Júpiter; e) Ceres; f) Urano ; **vi)** ¿Porqué el Sol que contiene el 99.8% de la masa del sistema solar contribuye con sólo el 05% del momento angular total del sistema solar?.

Solución:

P2) Bajo el supiesto de un planeta sin rotación, tenemos:

(a) El exceso de masa M' correspondiente al núcleo c/r al resto del planeta es:

$$M' = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3\left(5\rho - \rho\right) = \frac{16}{24}\pi\rho a^3 = \frac{M}{2}$$

(b) El potencial gravitacional debido al planeta de masa M y al núcleo descentrado con exceso de masa M'=M/2 es:

$$V = \frac{GM}{r} + \frac{GM'}{q}$$

$$\text{como } \frac{1}{q} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{a}{2r}\cos\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2r}\right)^2\left(3\cos^2\theta - 1\right)\right)$$

$$\rightarrow V = \frac{GM}{r} + \frac{GM}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{a}{2r^2}\cos\theta + \frac{1}{4}\frac{a^2}{4r^3}\left(3\cos^2\theta - 1\right)\right)$$

(c) Para encontrar los coeficientes J de masa, seguimos la indicación dada para la aproximación de 1er orden en término de los armónicos esféricos:

$$V = \frac{GM}{a}\left(J_0\left(\frac{a}{r}\right) + J_1\left(\frac{a}{r}\right)^2\cos\theta + J_2\frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^3\left(3\cos^2\theta - 1\right)\right)$$

Podemos entonces reconocer los coeficientes de masa :

$$J_0 = \frac{3}{2}$$

$$J_1 = \frac{1}{4}$$

$$J_2 = \frac{1}{16}$$

(d) Para calcular las expresiones de la aceleración de gravedad en el "Ecuador" de este planeta, sólo se requiere encontrar las expresiones analíticas de las derivadas:

$$g_r = \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{GM}{a^2}\left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos\theta - \frac{3}{32}\left(3\cos^2\theta - 1\right)\right)$$

$$g_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{GM}{a^2}\left(-\frac{1}{4}\sin\theta - \frac{3}{16}\cos\theta\sin\theta\right)$$

En el Ecuador θ=90 (co-latitud)