Clase 9 - Mecánica Estadística

Duración: 1:10 hrs. Prof. Álvaro Núñez
Publicada el 4 de Noviembre

1. Conceptos Básicos

- Distribución de Maxwell

2. Distribución de Maxwell

Determinaremos cuantas partículas del gas tienen momentum (p_x, p_y, p_z). Es fácil determinar la probabilidad de que una partícula tenga dicha velocidad: si una partícula tiene esa velocidad el resto debe tener energía:

$$E_{resto} = E - \frac{p^2}{2m}$$

Sea $\Omega_N(E)$ el número de estados de N partículas con energía N, la probabilidad de que una partícula tenga la velocidad dada es:

$$f(p_x, p_y, p_z) = \frac{\Omega_{N-1}(E_{resto})}{\Omega_N(E)}$$

Pero en la clase anterior calculamos $\Omega_N(E)$:

$$\Omega_N(E) = \frac{3N}{2E} \frac{\pi^{\frac{3N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3N}{2}+1\right)} (2mE)^{\frac{3N}{2}}$$

Evaluando la fracción obtenemos:

$$f(p_x, p_y, p_z) = \left(1 - \frac{3}{N}\right) \pi^{-3/2} \frac{\Gamma\left(\frac{3N}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{3(N-1)}{2}+1\right)} \left(\frac{E_{resto}}{E}\right)^{3(N-1)/2-1} \frac{1}{(2mE)^{3/2}}$$

Esta expresión se ve complicada pero se puede simplificar mucho tomando el limite $N \gg 1$.

- El primer término se hace 1.
- La fracción de funciones gamma se puede evaluar usando Stirling:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{3N}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{3(N-1)}{2}+1\right)} = \left(\frac{3N}{2}\right)^{3/2}$$

- El término que depende de la energía:

$$\left(\frac{E_{resto}}{E}\right)^{3(N-1)/2-1} = \left(1 - \frac{p^2/2m}{3N/2\, T}\right)^{3N/2} \approx \mathrm{e}^{-\frac{p^2}{2mT}}$$

Juntando todos esos resultados obtenemos:

$$f(p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{(2\pi mT)^{3/2}} \mathrm{e}^{-\frac{p^2}{2mT}}$$

que es conocida como distribución de Maxwell.

3. Derivación alternativa

- Lo primero es imaginar el gas representado en el espacio de velocidades.
- Cada partícula del gas tiene una velocidad $\vec{v}_i$ que representamos como un punto en el espacio (v_x, v_y, v_z).
- La colección de N partículas esta entonces asociada a un gas distribuido en el espacio de velocidades.
- Consideremos la distribución de partículas en el espacio $\vec{v}$:

  $$N\rho(\vec{v})d\vec{v} = \#\text{ de partículas en la celda indicada}$$

- Ahora determinaremos la forma que tiene esta distribución usando un argumento de Maxwell.
- Una condición importante que debe satisfacer es que:

  $$1 = \int d\vec{v}\rho(\vec{v})$$

  (se dice que la distribución esta normalizada).
- La forma de $\rho(\vec{v})$ se determina usando el siguiente argumento. Por simetría $\rho(\vec{v})$ no puede depender de la dirección de movimiento (por ejemplo las partículas que se mueven hacia la derecha son las mismas en promedio que las que se mueven hacia arriba.)

  $$\rho(\vec{v}) = \rho(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

- Ahora consideraremos la fracción de partículas que se mueve con velocidad v en la dirección x sin importar las componentes de la velocidad en las otras direcciones y llamaremos a dicha fracción $f_x(v)$. El mismo argumento de simetría nos lleva a concluir que $f_x(v) = f_y(v) = f_z(v) = f(v)$.
- El número de partículas que se mueven con velocidad (v_x, v_y, v_z) es evidentemente proporcional a $f(v_x)f(v_y)f(v_z)$.
- Concluimos que:

  $$\rho(\vec{v}) = \rho(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \propto f(v_x)f(v_y)f(v_z)$$

- La única posible función que cumple con esta identidad es:

  $$\rho(\vec{v}) = A\exp\left(-\gamma\vec{v}^2\right)$$

  Dado que el número total de partículas es N debemos tener:

  $$\int \rho(\vec{v})d\vec{v} = 1 \qquad (1)$$

  y para un gas ideal la energa cinética promedio por partículas esta dada por (2).

  $$\int \frac{1}{2}m\vec{v}^2\rho(\vec{v})d\vec{v} = \frac{3}{2}kT \qquad (2)$$

Usando esas dos condiciones determinamos A y γ.

$$\rho(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m\vec{v}^2}{2kT}\right) \tag{3}$$

La distribución para la rapidez es $D(v) = 4\pi v^2 \rho(v)$ y con eso mostramos que la rapidez más probable es:

$$v_{mp} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \tag{4}$$

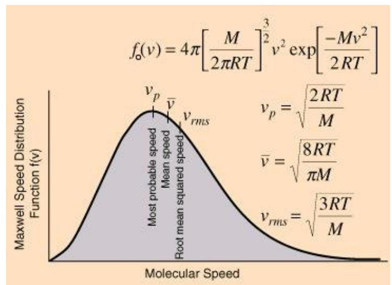

Figura 1: Distribución de velocidades

4. Tabla de integrales

$$I_n(\gamma) = \int_0^\infty \exp\left(-\gamma u^2\right) u^n du$$

Es fácil mostrar que:

$$I_0(\gamma) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}$$

$$I_1(\gamma) = \frac{1}{2\gamma}$$

$$I_2(\gamma) = \frac{1}{4\gamma}\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}$$

$$I_3(\gamma) = \frac{1}{2\gamma^2}$$

$$I_4(\gamma) = \frac{3}{8\gamma^2}\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}$$

5. Problemas

1. Traje de Astronauta.

    - Considere un gas ideal de densidad ρ dentro de un contendor de volumen V y a temperatura T. Sobre una de las caras se hace un pequeño agujero circular de radio a. Determine el momentum lineal por unidad de tiempo que el sistema pierde debido a las partículas que escapan del recipiente. Considere que la presión en el exterior del recipiente es mucho menor que la presión en el interior.
    - Un astronauta realiza una caminata espacial dentro de un traje presurizado a presión atmosférica ($\sim 10^5$ Pa). Durante la caminata una partícula perfora el traje haciendo un agujero de radio ~ 1 mm. Determine la fuerza que siente el astronauta debido al aire que escapa por el agujero.

2. Un horno de volumen V se mantiene a temperatura constante T. En el interior del horno hay un gas de masa m por molécula que inicialmente esta a una presión p_0. Un pequeño agujero de área A en la superficie exterior del horno deja escapar el gas lentamente. Demuestre que la presión en el interior del horno cambia según la ley:

$$p(t) = p_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right),$$

encuentre τ.