Mecánica Teórica

1 Dinámica newtoniana y ecuaciones de Lagrange.

- Mecánica de una partícula.
- Mecánica de un sistema de partículas.
- Ligaduras. Clasificación y coordenadas generalizadas.
- El principio de D'Alembert y las ecuaciones de Lagrange.
- Potenciales generalizados y función de disipación de Rayleight.

2 Simetrías y teoremas de conservación.

- Principio de Hamilton.
- Transformaciones de Galileo.
- Lagrangiana de una partícula libre.
- Lagrangiana de un sistema de partículas.
- Teorema de Noether.
- Teorema de conservación de la Energía.
- Traslaciones espaciales. Momento lineal o impulso.
- Rotaciones. Momento angular.
- Transformaciones de escala. Teorema del virial.
- El problema de tres cuerpos.
- El principio de la ligadura mínima de Gauss.
- El principio de Hamilton con ligaduras holonómicas y no holonómicas.
- Variables cíclicas o ignorables.
- El tiempo como variable cíclica o ignorable. El principio de la mínima acción. El principio de Jacobi.
- Pequeñas oscilaciones alrededor de un punto de equilibrio.

3 Teoría de Hamilton.

- Transformaciones de Legendre.

- Transformaciones de Legendre aplicadas a la función Lagrangiana.
- Ecuaciones canónicas.
- La integral canónica.
- Corchetes de Poisson.
- El teorema de los corchetes de Poisson.
- El espacio de fases y el fluido de fases.
- Teorema de Liouville.
- El teorema de circulación de Helmholtz.
- Eliminación de coordenadas cíclicas o ignorables. La función de Routh.
- Forma paramétrica de las ecuaciones canónicas.

4 Transformaciones canónicas.

- Función generatriz.
- Transformaciones canónicas básicas.
- Ejemplos de transformaciones canónicas.
- Transformaciones de Mathieu-Lie.
- Forma diferencial invariante. Circulación.
- La forma simpléctica de las transformaciones canónicas.
- Invarianza de los paréntesis de Poisson y el volumen bajo las transformaciones canónicas.
- El movimiento de un sistema como una sucesión continua de transformaciones canónicas.
- Invariantes integrales: Teoremas de Liouville y Helmholtz.

5 Teoría de Hamilton-Jacobi.

- Familias de transformaciones canónicas uniparamétricas. Generadores.
- Simetrías y leyes de conservación.
- La ecuación de Hamilton-Jacobi.
- El límite semiclásico de la ecuación de Schrödinger.

- Separación de variables. Sistemas acotados.
- Variables acción-ángulo. unidimensional.
- El método de Hamilton-Jacobi aplicado al problema de fuerzas centrales.
- Variables acción-ángulo en el problema de fuerzas centrales.

6 Teoría de perturbaciones canónica.

- Introducción.
- Teoría de perturbaciones dependiente del tiempo.
- Teoría de perturbaciones independiente del tiempo.
- Invariantes adiabáticos.

7 Teoría clásica de campos.

- Introducción. Transición de un sistema discreto a otro continuo.
- Formulación Lagrangiana de la teoría de campos.
- Formulación de Hamilton de la teoría de campos.
- Teorema de Noether. Integrales de las ecuaciones de campo.
- Tensor de energía-momento.
- Transformaciones de Lorentz.
- Tensor de momento angular.

Bibliografía:

- Jorge V. José y Eugene Saletan, *Classical Dynamics: A Contemporary Approach* Cambridge University Press.
- Cornelius Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics.* Dover Publications, Inc.
- A. Sommerfeld, *Lectures on Theoretical Physics Vol. 1: Mechanics.* Academic Press.

- L.D. Landau y E.M. Lifshitz, *Curso de Fisica Teorica Vol. 1: Mecánica.* Editorial Reverté.
- H. Goldstein, *Mecánica Clásica.* Editorial Reverté, Editorial Aguilar.
- H. Goldstein, C. Poole y J. Safko, *Classical Mechanics, Third Edition.* Addison Wesley.
- V.I. Arnold, *Métodos Matemáticos de la Mecánica Clásica.* Editorial Paraninfo.
- E.T. Whittaker, *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies.* Cambridge University Press.
- A. Sokolov, I. Ternov, V. Zukovskii y A. Borisov, *Quantum Electrodynamics*, Ed. MIR.
  La primera mitad del libro trata sobre teoría clásica de campos.
- M. A. Martín, M. Morán y M. Reyes, *Iniciación al Caos.* Editorial Síntesis.

Ejercicios. Primer Boletín.

1. Una varilla sin peso AB, de longitud ℓ se apoya en C sobre una columna vertical OC, estando sujeta en B por un cable al tiempo que un peso P cuelga del otro extremo A, tal y como se indica en la figura. Determinar el valor mínimo que ha de tener el coeficiente de rozamiento en C para que exista equilibrio y determinar la tensión del cable BO.

   AC=3 m ; AB=5 m ; P=2500 Kg. Aplíqueso el principio de los trabajos virtuales.

2. Considérese un disco de radio R que rueda sin deslizar sobre un plano horizontal, figura 2. El disco permanece siempre en posición vertical. Demuéstrese que las ligaduras sobre el sistema no se pueden integrar dada la imposibilidad de encontrar un factor integrante y por tanto son no-holonómicas.

3. Demostrar que si dos Lagrangianos conducen a las mismas ecuaciones de movimiento entonces difieren necesariamente en la derivada total respecto del tiempo de una funcion de las coordenadas generalizadas y del tiempo, $F(q,t)$.

4. Considérese el péndulo doble coplanario representado en la figura 3. Determinar su Lagrangiano, hallar las ecuaciones de movimiento. Considérese el límite de pequeñas oscilaciones y resuélvanse las ecuaciones de movimiento resultantes tomando $m_2 \to 0$.

5. En el esquema de la figura 4, el punto m_2 se mueve sobre el eje vertical, y todo el sistema gira con velocidad angular Ω alrededor de este eje. Determinar el Lagrangiano del sistema y sus ecuaciones de movimiento. Resuélvanse en el límite de pequeñas oscilaciones.

6. El campo electromagnético es invariante bajo una transformación de gauge:

$$\vec{A}(\vec{r},t) \to \vec{A}(\vec{r},t) + \vec{\nabla}\psi(\vec{r},t) \ ,$$
$$\phi(\vec{r},t) \to \phi(\vec{r},t) - \frac{\partial \psi(\vec{r},t)}{\partial t} \ ,$$

   donde $\psi(\vec{r},t)$ es arbitrario (diferenciable). ¿Qué efecto tiene esta transformación de gauge sobre el Lagrangiano de una partícula en un campo electromagnético?. ¿Se ven afectadas las ecuaciones de movimiento?.

7. Considérese un muelle de longitud L_a (sin extender) que está conectado a un soporte en uno de sus extremos y tiene una masa M en el otro extremo. Despreciar la masa del muelle y tomar la masa M como puntual. El movimiento está confinado a un plano vertical. El muelle se contrae sin combarse y puede oscilar en el plano.

   a) Determinar el Lagrangiano del sistema y sus ecuaciones de movimiento.

   b) Resolverlas a orden dominante en el límite de pequeñas oscilaciones.

   c) Resolverlas a orden siguiente al dominante.

Ejercicios. Segundo Boletín.

1.- Hallar el cociente de los tiempos en la misma trayectoria para partículas de diferentes masas pero igual energía potencial.

2.- Hallar el cociente de los tiempos en la misma trayectoria para partículas que tienen la misma masa, pero su energía potencial difiere en un factor constante.

3.- Consideremos aquellas coordenadas que aparecen en el Lagrangiano pero no sus velocidades generalizadas. Muestra que una variable de esta naturaleza puede ser eliminada *algebraicamente* en función del resto de variables, con lo que el problema dinámico queda reducido a un número menor de variables.

4.- Muestre que la integral de la acción del principio de Jacobi es:

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{2(E-V)} \sqrt{\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} q_i' q_k'}\; d\tau \ .$$

Muestre que los p_i asociados con este integrando satisfacen la identidad:

$$\frac{\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik} p_i p_k}{2(E-V)} = 1 \ ,$$

donde los b_{ik} son los coeficientes de la matriz que es la inversa de la matriz original a_{ik}.

5.- Péndulo de Ehrenfest. Un péndulo simple cuelga de una polea fija. El otro extremo de la cuerda está en la mano de un observador que tira hacia arriba de la cuerda LENTAMENTE, recortando la longitud del péndulo con velocidad uniforme. Despreciando la fricción, hallar el cambio en la energía total desde la posición $\theta = 0$ a la siguiente posición $\theta = 0$. Tomar la velocidad de cambio de la longitud del péndulo como parámetro pequeño y calcular el primer orden no nulo de la perturbación.

6.- Sea un pénulo coplanario, ejercicio 3^0 de la primera hoja de problemas, en el que $m_1 = m_2 = m$ y $l_1 = l_2 = l$.

a) Da la expresión del Lagrangiano del sistema.

b) Demuestra que los dos ejes Q_1 y Q_2 de las coordenadas curvilíneas forman un ángulo de 45^0.

c) Muestra que las frecuencias conectadas con los dos ejes principales son:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \sqrt{2+\sqrt{2}}\,\nu \ , \\ \nu_2 &= \sqrt{2-\sqrt{2}}\,\nu \ , \end{aligned}$$

donde ν es la frecuencia natural de cada uno de los péndulos simples.

d) Mostrar que los dos ejes principales $\vec{p}_1$ y $\vec{p}_2$ biseccionan el ángulo entre Q_1 y Q_2 y su ángulo suplementario.

7.- Sean

a) Un oscilador armónico unidimensional:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}k^2q^2 \ ,$$

b) La reflexión elástica de una partícula entre dos paredes rígidas.

Dibujar las líneas de movimiento para ambos casos en el espacio de fases (p,q).

Reemplazar el potencial del oscilador armónico por:

$$V = \frac{1}{2}k^2q^{2r} \ ,$$

donde r varía entre 1 e infinito. Mostrar que las elipses concéntricas del oscilador armónico se deforman y para $r \to \infty$ recuperamos el caso b) donde las 'paredes' están en $q = \pm 1$.

Ejercicios. Tercer Boletín.

1.- Una partícula en un campo gravitatorio uniforme sólo se puede mover sobre la superficie de una esfera centrada en el origen. El radio de la esfera varía con el tiempo según una función conocida $r(t)$. Obtener el Hamiltoniano y las ecuaciones canónicas de movimiento. Discutir la variación de la energía con el tiempo. ¿Es el Hamiltoniano la energía total?.

2.- Considera el Hamiltoniano:

$$H = \frac{p^2}{2m} e^{-q/a} \ ,$$

con un grado de libertad. Hallar $q(t)$ y $p(t)$. La ecuación para d^2q/dt^2 parece corresponder a la ecuación de una fuerza disipativa proporcional a $\dot{q}^2$, pero no es así. Sólo lo es para $\dot{q} > 0$. Disicutir por qué. Consideremos que este es el caso, $\dot{q} > 0$. Entonces podemos pensar que este Hamiltoniano corresponde a un problema unidimensional con una fuerza disipativa en el que q es una coordenada cartesiana. Hallar entonces la velocidad de disipación de la energía (que corresponde bajo estos supuestos simplemente a la energía cinética). Determinar la variación temporal del Hamiltoniano, dH/dt. ¿ Corresponde el Hamiltoniano a la energía mecánica de la partícula?.

3.- Dado el Hamiltoniano:

$$H = q_1 p_1 - q_2 p_2 - a q_1^2 + b q_2^2 \ ,$$

donde a y b son constantes. Mostrar que:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{p_2 - b q_2}{q_1} \ , \\ F_2 &= q_1 q_2 \ , \\ F_3 &= q_1 \, e^{-t} \ , \end{aligned}$$

son constantes de movimiento. Discutir su independencia y si exis-ten otras constantes de movimiento que sean independientes. Si exis-ten, darlas hasta obtener el mayor número posible de constantes independientes. Mostrar explícitamente que $[F_i, F_j]$ son constantes de movimiento.

4.- Probar que la transformación:

$$\begin{aligned} Q_1 = q_1^2 \qquad & Q_2 = q_2/\cos p_2 \\ P_1 = \frac{p_1 \cos p_2 - 2q_2}{2q_1 \cos p_2} \quad & P_2 = \mathrm{sen} p_2 - 2q_1 \ , \end{aligned} \tag{1}$$

es canónica. Encuentra una función generatriz adecuada que de lugar a dicha transformación canónica.

5.- Encontrar una transformación canónica tal que el Hamiltoniano de un cuerpo que cae libremente en un campo gravitatorio uniforme con un único grado de libertad sea $H(Q, P) = P$. Resolver el problema en términos de Q, P y volver a transformar a las variables originales q, p.

6.- Sea:

$$\begin{aligned} Q_1 = q_1^2 \quad & P_1 = P_1(q_1, q_2, p_1, p_2) \ , \\ Q_2 = q_1 + q_2 \quad & P_2 = P_2(q_1, q_2, p_1, p_2) \ , \end{aligned}$$

una transformación canónica. Completar la transformación encontrando la expresión más general para P_1 y P_2. Mostrar que una elección particular para P_1 y P_2 reducirá el Hamiltoniano de:

$$H = \left(\frac{p_1 - p_2}{2q_1}\right)^2 + p_2 + (q_1 + q_2)^2 \ ,$$

a

$$H = P_1^2 + P_2 \ .$$

Utilizar esta transformación para obtener q_1 y q_2 como funciones del tiempo.

7.- Considera la transformación de punto:

$$Q = \mathrm{Arctan}(\lambda q/p) \ .$$

Complétala para formar una transformación canónica, mostrando que:

$$\begin{aligned} P &= \frac{p^2 + \lambda^2 q^2}{2\lambda} + \frac{p^2 + \lambda^2 q^2}{\lambda q} G(p, q, t) \ , \\ G &= \frac{\partial R(q, p, t)}{\partial p} \ , \end{aligned} \tag{2}$$

siendo $R(q, p, t)$ una función arbitraria diferenciable.

Aplicar esta transformación al problema del oscilador armónico simple de masa m y frecuencia angular $w = \lambda/m$. (Elegir G para simplificar el problema, resolverlo en función de las nuevas variables y volver a las variables originales q, p.)

8.- Considera una partícula sometida a la fuerza:

$$F = -kq - \frac{\alpha}{q^3} \; .$$

Mostrar que este sistema se puede describir con el Hamiltoniano:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2} q^2 + A\frac{p}{q} \; .$$

Expresar A en función de α y emplear la transformación del problema anterior para resolver este problema. Es decir, resolverlo en las nuevas variables Q, P y volver a las originales q, p.

Ejercicios. Cuarto Boletín.

1. Sea:

$$\phi = \arctan\frac{x_1}{x_2} \ ,$$

la variable de rotación alrededor del eje 3. Sea $G(\vec{x}, \vec{p})$ una variable canónicamente conjugada a ϕ, definida por $[\phi, G] = 1$. Discutir cualquier diferencia entre G y ℓ_3, siendo ℓ_3 la componente de momento angular en la dirección 3. Encontrar las θ-órbitas generadas por G.

2. *Coordenadas parabólicas ξ, η, ϕ.* Discutir la aplicación de las coordenadas parabólicas para obtener una ecuación de Hamilton-Jacobi separable con el potencial:

$$V = \frac{\alpha}{r} - F\,z \ .$$

Dar una expresión cerrada de la función principal de Hamilton S y reexpresar las constantes de integración en variables canónicas cilíndricas ρ (p_ρ), z (p_z), ϕ (p_ϕ).
Ayuda: Consultar p.e. Landau y Lifshitz, Vol. I, Mecánica.

3. Considerar el Hamiltoniano:

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{1}{2m}(p_2 - kq_1)^2 \ .$$

Resolver el movimiento del sistema por el método de Hamilton-Jacobi. ¿A qué sistema físico podría corresonder?. Resolver adicionalmente el movimiento del sistema de los siguientes tres modos:
a) Resolviendo las ecuaciones canónicas.
b) Haciendo una transformación canónica con:

$$Q_1 = Ap_1 \, ; \, P_1 = B(p_2 - kq_1) \ ,$$

eligiendo Q_2 y P_2 convenientemente, así como las constantes A y B. Resolver para Q_α, P_α y volver a las variables originales.
c) Empleando el método de las variables acción-ángulo.

4. De la defnción de las variables acción J_α, demostrar que:

$$\det\left(\partial J_\alpha / \partial Q_\beta\right) \neq 0 \ .$$

Ayuda: En el curso de la demostración argumentar que (no suma):

$$\det\left(\oint \frac{\partial^2 W}{\partial q_\alpha \partial Q_\beta}\right) = \oint ... \oint \det\left(\frac{\partial^2 W}{\partial q_\alpha \partial Q_\beta}\right) \, dq_1 ... dq_n \ .$$

5. Resolver el oscilador armónico simple mediante los métodos relacionados de Hamilton-Jacobi y variables acción-ángulo.

6. Considerar el oscilador armónico simple bidimensional cuyo Hamiltoniano viene dado por $H = \frac{1}{2}\sum_\alpha \xi_\alpha \xi_\alpha$, con α variando de 1 a 4. Sea $G = \sum_{\mu\nu} w_{\mu\nu}\xi_\mu\xi_\nu$, tal que $w_{\mu\nu} = w_{\nu\mu}$, el generador infinitesimal de una familia continua de transformaciones canónicas bajo las cuales H es invariante. Dar la forma más general de la matriz Ω, cuyos elementos de matriz son $w_{\mu\nu}$.

   Mostrar que Ω se puede expresar como la combinación lineal de tres matrices $\Omega^{(\beta)}$ básicas y dar las θ-órbitas generadas por los generadores infinitesimales $G^{(\beta)} = \sum_{\mu\nu} w_{\mu\nu}^{(\beta)}\xi_\mu\xi_\nu$.

7. Resolver el problema del péndulo de Ehrenfest, ejercicio 5^0 del boletín segundo, haciendo uso de la teoría de invariantes adiabáticos.

8. Consideremos un gas como una colección de esferas confinadas en una caja sin interacción mutua, salvo posibles choques. Tomemos una sola partícula de masa m confinada en un intervalo finito del eje x (caja unidimensional), moviéndose muy rápidamente adelante y atrás entre los dos extremos opuestos del intervalo. Suponer invarianza adiabática y determinar como varía la presión como función de la longitud de la caja. ¿Cómo variará la temperatura?. En un proceso adiabático PV^γ=constante. Determinar γ en este caso y comparar con el valor obtenido en la teoría cinética de los gases.

Figura 1:

Figura 2:

Figura 3:

Figura 4: