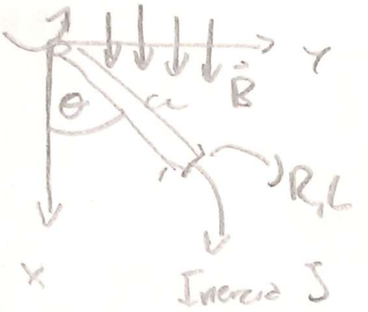
Aux extra 3   Disculpen el retraso

P2

Freno magnético



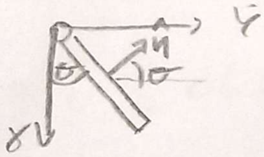
Nos piden calcular la velocidad angular $\dot{\theta}$ en función del ángulo $\Rightarrow \dot{\theta}(\theta)$

Datos: J, $\vec{B} = B_0 \hat{\imath}$ y que en $t=0$, $\vec{\omega} = \omega_0 \hat{k}$

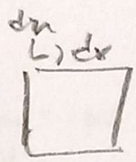
Intuición: el cambio de flujo generará una fem que hará torque con el campo externo.

- Calculamos el flujo:

$\phi = \iint \vec{B}\, d\vec{S}$, Pero $d\vec{S} = dS \cdot \hat{n}$, calculamos $\hat{n}$ con geometría



$\Rightarrow \hat{n} = (-\operatorname{sen}\theta\, \hat{\imath} + \cos\theta\, \hat{\jmath})$



$$\Rightarrow \phi = \int_0^a \int_0^a B_0 \hat{\imath} \cdot (-\operatorname{sen}\theta\, \hat{\imath} + \cos\theta\, \hat{\jmath})\, \underbrace{dx\, dr}_{\text{variables de integración}} = -B_0 a^2 \operatorname{sen}\theta$$

Si consideramos el flujo autoinducido $\phi_i = LI$

Luego la fem y la fem autoinducida queda

$$\mathcal{E} = \dot{\phi} = +B_0 a^2 \cos\theta\, \dot{\theta}, \quad \mathcal{E}_i = -L\dot{I}$$

Juntando todo queda: $\mathcal{E} = RI - L\dot{I}$

$$\Rightarrow \boxed{B_0 a^2 \cos\theta\, \dot{\theta} = RI - L\dot{I}}$$ Ec a resolver para I

Vamos a considerar $L = 0$, porque es menos matraca

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{B_0 a^2 \cos\theta \, \dot{\theta}}{R}}$$

Por otra parte podemos escribir el momento dipolar de la espira

$$\vec{m} = I \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vector} \\ \text{superficie}}}{\vec{S}} = I a^2 \hat{n} = I a^2 (\text{-}\operatorname{sen}\theta \, \hat{\imath} + \cos\theta \, \hat{\jmath})$$

Por lo que el torque magnético queda de una forma simple:

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B} = I a^2 (-\operatorname{sen}\theta \, \hat{\imath} + \cos\theta \, \hat{\jmath}) \times B_0 \hat{\imath} = -I a^2 B_0 \cos\theta \, \hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{\tau} = -\frac{B_0^2 a^4 \cos^2\theta \, \dot{\theta}}{R} \hat{k}$$

Si escribimos $\vec{L}$, momento angular como: $\vec{L} = J \dot{\theta} \hat{k}$ y hacemos $\dot{\vec{L}} = \vec{\tau}$, obtenemos

$$J \ddot{\theta} = -\frac{B_0^2 a^4 \cos^2\theta \, \dot{\theta}}{R}$$

Para resolver, usamos el truco de mecánica $\ddot{\theta} = \dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$

$$\Rightarrow \cancel{\dot{\theta}} \, d\dot{\theta} = -\frac{B_0^2 a^2 \cos^2\theta \, \cancel{\dot{\theta}} \, d\theta}{JR} \qquad \frac{-B_0^2 a^4}{JR} = C$$

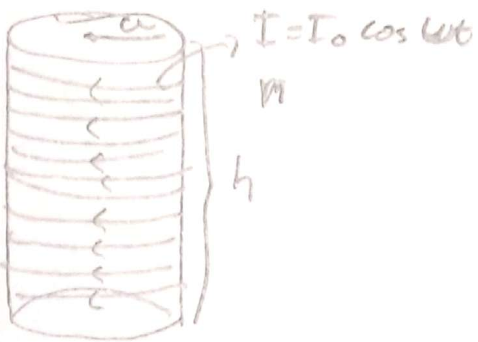
$$d\dot{\theta} = C \cos^2\theta \, d\theta \quad \Big/ \int_0^t$$

$$= \dot{\theta} - \omega_0 = C \int_0^\theta \cos^2\theta = C \int_0^\theta \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$= \frac{C}{2} \left[\theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\theta}(\theta) = \omega_0 - \frac{B_0^2 a^4}{2JR} \left[\theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} \right]}$$

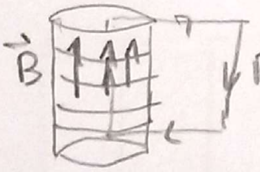
Problema 3



Nota, cosas variables (en este caso la corriente) desencadenan toda clase de campos.

a) Calcular flujo magnetico a traves de una circunferencia de radio $\rho < a$, fem inducida y campo Electrico dentro de la bobina.

- El campo magnetico se sabe por ley de Ampere clasico



$$\oint_\Gamma \vec{B}\, d\vec{l} = \mu I \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \mu n I_0 \cos \omega t\, \hat{z}}$$

- Luego como la circunferencia de radio ρ es concentrica a la bobina

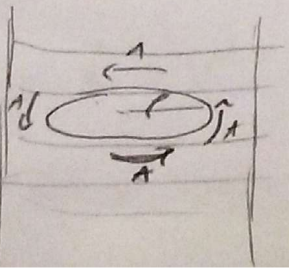
$$\phi_\rho = \vec{B} \cdot \vec{A} = \boxed{\mu n I_0 \pi \rho^2 \cos \omega t}$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = -\dot{\phi}_\rho = \boxed{\mu n I_0 \pi \rho^2 \omega \operatorname{sen} \omega t}$$

- Recordando la relación $B = \nabla \times A \Rightarrow \iint \vec{B}\, d\vec{s} = \oint_\Gamma A\, d\vec{l}$

$\Rightarrow \phi = \oint_\Gamma A\, d\vec{l}$, Como asumimos que $\hat{A} \parallel \hat{\Gamma}$, o sea $\vec{A} = A\hat{\theta}$

Usamos el mismo circuito de radio ρ vemos que



$$\oint_\Gamma \vec{A} \cdot d\vec{l} = \underbrace{2\cancel{\pi}\cancel{\rho}}_{\text{Perimetro}}\, \vec{A} = \mu n I_0 \cancel{\pi} \rho^{\cancel{2}} \cos \omega t$$

$$\Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu n I_0 \rho \cos \omega t}{2}\, \hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{E = -\frac{\partial A}{\partial t}} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\mu n I_o \rho \omega \operatorname{sen}\omega t}{2}\,\hat{\theta}}$$

b) Calcular la corriente total

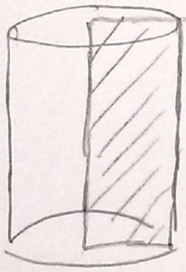
- Recordando ley de Ohm $\vec{J} = g\vec{E} \Rightarrow \boxed{\vec{J} = \frac{\mu g n I_o \rho \omega \operatorname{sen}\omega t}{2}\,\hat{\theta}}$

Luego la corriente total es el flujo de la densidad de corriente

$$I = \iint_S \vec{J}\, d\vec{S}$$

Dandonos como superficie el rectangulo

En este caso $d\vec{S} = d\rho\, dz\, \hat{\theta}$



$$I = \int_0^h \int_0^r \frac{\mu g n I_o \omega \operatorname{sen}\omega t}{2}\,\hat{\theta}\,\rho \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow I = \frac{\mu g n I_o \omega \operatorname{sen}\omega t}{2} \int_0^h \int_0^r \rho\, d\rho\, dz = \boxed{\frac{\mu g n I_o \omega \operatorname{sen}\omega t\, h r^2}{4}}$$

<u>Propuesto</u>, calcular la potencia disipada, ie $\iiint_V \vec{J} \cdot \vec{E}\, dV$ //

c) Calcular las corrientes de magnetización

$$\Rightarrow \vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad , \mu = \mu_0 (1 + \chi_m) \quad \Big| \quad H = \mu n I_o \cos\omega t$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{M} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}\, n I_o \cos\omega t\, \hat{k}}$$

$$\Rightarrow \vec{J}_m = \nabla \times \vec{M} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{K}_m = \vec{M} \times \hat{n}$$

→ Borde del cilindro $\hat{K}_m = \vec{M} \times \hat{r} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu}\, n I_o \cos\omega t\, \hat{\theta}$ //

→ Tapas $\hat{K}_m = \vec{M} \times \hat{k} = 0$ //