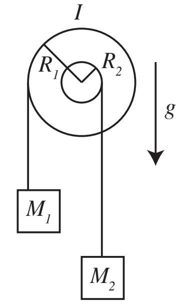
FI1002 - Sistemas newtonianos
Semestre de primavera 2016

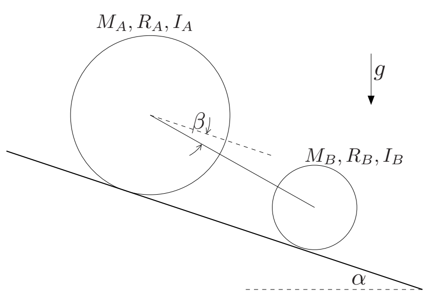
Control 2
Profesores: R. Arias, G. Castillo, M. L. Cordero, R. Garreaud
N. Huneeus, R. Rondanelli, R. Soto y N. Zamorano.
26 de noviembre 2016
Tiempo: 2:30



P1. De la polea de la figura cuelgan dos objetos de cuerdas enrolladas a una distancia R_1 y R_2 del centro de la polea. Los objetos tienen masa M_1 y M_2, respectivamente. La polea tiene un momento de inercia I con respecto a su centro y puede girar libremente en torno a este. En $t = 0$ el sistema se suelta desde el reposo.

Determine la velocidad angular de la polea cuando M_1 ha descendido una distancia H.

P2.



Se tienen dos cilindros de masas M_A y M_B, radios R_A y R_B y momentos de inercia respecto a sus centros I_A e I_B, tales que

$$\frac{I_A}{M_A R_A^2} > \frac{I_B}{M_B R_B^2}.$$

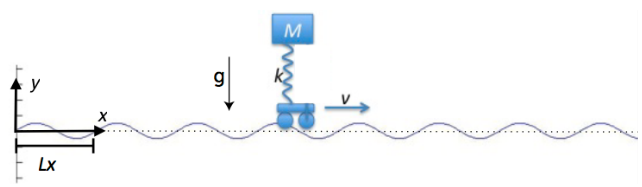
Los cilindros se mueven sobre un plano inclinado en un ángulo α, rodando sin resbalar, debido al roce estático con la superficie. Los cilindros están unidos por su centro mediante una cuerda ideal que forma un ángulo β con respecto al plano inclinado.

(a) (4 pts.) Determine la aceleración del sistema.

(b) (2 pts.) Calcule la tensión de la cuerda.

P3. Considere un vehículo que se desplaza por un camino recto cuya superficie presenta ondulaciones verticales (calamina) tales que su amplitud respecto de un nivel de referencia, está dada por

$$y_c = y_o \sin\left(\frac{2\pi}{L_x} x\right).$$



El vehículo se desplaza por la calamina con una velocidad constante v en el eje x, propulsado por un motor interno. Adosado al vehículo se encuentra un resorte de constante elástica k y de largo natural l_0 que soporta un acoplado de masa M, como se muestra en la figura. El aire ejerce una fuerza de roce viscoso sobre el acoplado opuesta a su velocidad vertical $\dot{y}$, $F_r = -b\dot{y}$. La amplitud de la calamina es lo suficientemente pequeña para considerar que el resorte y el acoplado permanecen siempre verticales. Además, l_0 es suficientemente grande como para que en ningún momento el acoplado choque con el suelo.

(a) (1 pt.) Muestre que la frecuencia de forzamiento ω del acoplado está dada por $\omega = 2\pi v/L_x$.

(b) (3 pts.) Encuentre la ecuación de movimiento para la posición y del acoplado. Use un cambio de variable para que la fuerza de gravedad y la longitud natural del resorte no aparezcan explícitamente en la ecuación de movimiento.

(c) (2 pts.) Al interior del acoplado se guarda un huevo muy frágil y de masa despreciable, ¿Para qué valores de la velocidad horizontal del vehículo el huevo se quiebra, si la máxima aceleración que puede soportar el huevo es $2g$? Considere para esta parte que no hay amortiguamiento.

Recuerde que la solución de la ecuación

$$\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{\tau} + \omega_0^2 x = f_0 \operatorname{sen} \omega t,$$

en el estado estacionario es

$$x(t) = B(\omega) \operatorname{sen}(\omega t - \delta), \quad \text{donde } B(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}}, \text{ y } \tan\delta = \frac{\omega}{\tau(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Solución

P1. En $t = 0$ el sistema está en reposo, por lo que la energía mecánica es nula.

Cuando M_1 ha descendido una distancia H, M_2 ha subido una distancia H_2, por determinar. Las velocidades de M_1 y M_2 son v_1 y v_2, respectivamente, y la polea rota con velocidad angular ω. La energía mecánica del sistema está dada por

$$E = -M_1 g H + M_2 g H_2 + \frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2 + \frac{1}{2} I \omega^2.$$

Consideremos ahora una pequeña rotación de la polea en un ángulo $d\phi$, que causa un desplazamiento de M_1 en dy_1 hacia abajo y un desplazamiento de M_2 hacia arriba en dy_2. Por geometría, estas cantidades están relacionadas mediante las siguientes expresiones:

$$dy_1 = R_1 d\phi,$$
$$dy_2 = R_2 d\phi.$$

Entonces, se tiene

$$v_1 = R_1 \omega,$$
$$v_2 = R_2 \omega,$$
$$\frac{H_2}{H_1} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Reemplazando en la expresión de la energía y despejando ω, obtenemos

$$\omega = \sqrt{\frac{2g(M_1 R_1 - M_2 R_2)}{M_1 R_1^2 + M_2 R_2^2 + I} \frac{H}{R_1}}.$$

Para que esta expresión tenga sentido, se requiere que $M_1 R_1 > M_2 R_2$. Si se tiene $M_1 R_1 = M_2 R_2$, entonces el sistema se mantiene en reposo pues los torques sobre la polea se anulan. En el caso que $M_1 R_1 < M_2 R_2$, en realidad $H < 0$ (M_1 sube) y la expresión es válida.

P2. Llamamos O_A y O_B a los centros de los discos y P_A y P_B los puntos de apoyo de los discos, los cuales corresponden a centros instatáneos de rotación. Escogemos un sistema de ejes cartersiano, con el eje x bajando según el plano inclinado y el eje y, perpendicular al plano, hacia arriba. Finalmente, escogemos como sentido positivo de rotación el sentido horario.

Forma 1: Se usan las ecuaciones de torque respecto a los centros instantáneos de rotación

$$\tau_{PA} = M_A g R_A \sin\alpha + T R_A \cos\beta \tag{1}$$
$$\tau_{PB} = M_B g R_B \sin\alpha - T R_B \cos\beta \tag{2}$$

Las ecuaciones de movimiento son

$$\tau_{PA} = I_{PA} \alpha_A \tag{3}$$
$$\tau_{PB} = I_{PB} \alpha_B \tag{4}$$

donde $I_{PA} = I_A + M_A R_A^2$ es el momento de inercia con respecto a P_A, que se calcula usando el teorema de Steiner.

Finalmente, como los cilindros están unidos, tienen la misma aceleración lineal a, la que se relaciona con las aceleraciones angulares por

$$a = R_A \alpha_A \tag{5}$$
$$a = R_B \alpha_B \tag{6}$$

Reemplazando en las ecuaciones se llega a

$$I_{PA} a / R_A = M_A g R_A \sin\alpha + T R_A \cos\beta \tag{7}$$
$$I_{PB} a / R_B = M_B g R_B \sin\alpha - T R_B \cos\beta \tag{8}$$

Estas son dos ecuaciones, para las dos incognitas que nos piden: a y T.

Diviendo las ecuaciones (7) por R_A y (8) por R_B y luego sumándolas se obtiene

$$\left(\frac{I_{PA}}{R_A^2} + \frac{I_{PB}}{R_B^2}\right) a = (M_A + M_B) g \sin\alpha \tag{9}$$

de la que resulta

$$a = \frac{(M_A + M_B) g \sin\alpha}{M_A + M_B + I_A/R_A^2 + I_B/R_B^2} \tag{10}$$

donde se usó la formula de Steiner para dejar el resultado en términos de los datos del problema.

Para obtener la tensión, restamos las ecuaciones (7) y (8), luego de dividirlas por (I_P/R), con lo que se obtiene

$$0 = \left(\frac{M_A R_A^2}{I_{PA}} - \frac{M_B R_B^2}{I_{PB}}\right) g \sin\alpha + \left(\frac{R_A^2}{I_{PA}} + \frac{R_B^2}{I_{PB}}\right) T \cos\beta \tag{11}$$

dando lugar a

$$T = \left(\frac{\frac{M_A R_A^2}{I_{PA}} - \frac{M_B R_B^2}{I_{PB}}}{\frac{R_A^2}{I_{PA}} + \frac{R_B^2}{I_{PB}}}\right) \frac{g \sin\alpha}{\cos\beta} \tag{12}$$

Forma 2: Se usan las ecuaciones de torque respecto a los centros de los discos

$$\tau_{OA} = R_A F_{rA} \tag{13}$$

$$\tau_{OB} = R_B F_{rB} \tag{14}$$

donde F_{rA} y F_{rB} son las fuerzas de roce.

Las ecuaciones de movimiento son

$$\tau_{OA} = I_A \alpha_A \tag{15}$$

$$\tau_{OB} = I_B \alpha_B \tag{16}$$

Finalmente, como los cilindros están unidos, tienen la misma aceleración lineal a, la que se relaciona con las aceleraciones angulares por

$$a = R_A \alpha_A \tag{17}$$

$$a = R_B \alpha_B \tag{18}$$

Reemplazando en las ecuaciones se llega a

$$I_A a = R_A^2 F_{rA} \tag{19}$$

$$I_B a = R_B^2 F_{rB} \tag{20}$$

En este caso, tenemos dos ecuaciones, pero hay tres incógnitas. Se usa la ecuación de Newton, según x, de todo el sistema

$$(M_A + M_B) a = (M_A + M_B) g \sin\alpha - F_{rA} - F_{rB} \tag{21}$$

Reemplazando las fuerzas de roce de las ecuaciones anteriores se obtiene

$$a = \frac{(M_A + M_B) g \sin\alpha}{M_A + M_B + I_A/R_A^2 + I_B/R_B^2} \tag{22}$$

Para obtener la tensión requerimos una ecuación adicional. Por ejemplo, se puede usar la ecuación para la partícula A

$$M_A a = M_A g \sin\alpha + T \cos\beta - F_{rA} \tag{23}$$

Reemplazando la fuerza de roce en términos de a y luego el valor obtenido de a, se obtiene

$$T = \left(\frac{I_A M_B R_B^2 - I_B M_A R_A^2}{I_A R_B^2 + I_B R_A^2 + (M_A + M_B) R_A^2 R_B^2} \right) \frac{g \sin\alpha}{\cos\beta} \tag{24}$$

que, se puede verificar, coincide con el resultado obtenido de la otra forma.

P3.

(a) Dado que la velocidad del vehículo es constante e igual a v, el carro recorre una distancia $x = vt$ para todo tiempo. Reemplazando en la función que define la ondulación de la calamina, se encuentra que el forzamiento tiene una frecuencia angular de

$$\omega = \frac{2\pi v}{L_x}. \tag{25}$$

(b) Consideramos el sistema de coordenadas mostrado en la figura, de manera que y es la altura del acoplado con respecto al plano promedio del suelo.

En este sistema,

$$M\ddot{y} = -b\dot{y} - k\delta - Mg, \tag{26}$$

donde δ es la deformación del resorte que se escribe como $\delta = y - y_C - l_0$, de tal forma que la ecuación se puede escribir como

$$M\ddot{y} = -b\dot{y} - ky + ky_o \sin(\omega t) + kl_0 - Mg, \tag{27}$$

y reordenando,

$$\ddot{y} + \frac{b}{M}\dot{y} + \frac{k}{M}y = \frac{ky_o}{M}\sin(\omega t) - g + \frac{k}{M}l_0. \tag{28}$$

Reconociendo los parámetros usuales $\tau = M/b$ y $\omega_0^2 = k/M$ y haciendo el cambio de variables $z = y - l_0 + Mg/k$, la ecuación queda finalmente como,

$$\ddot{z} + \frac{\dot{z}}{\tau} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 y_0 \sin(\omega t), \tag{29}$$

que es la ecuación del oscilador armónico forzado y amortiguado y cuya solución es conocida (dada). Para el caso particular en que el amortiguamiento es cero la solución es solo la parte permanente,

$$z = \frac{\omega_0^2 y_0 \sin(\omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{30}$$

(c) Dado que el cambio de variable no afecta el valor de la aceleración, la condición sobre la aceleración de la oscilación es que la amplitud de la respuesta forzada no supere el valor crítico $2g$, por lo tanto

$$\left| \frac{\omega_0^2 \omega^2 y_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \right| < 2g \tag{31}$$

la solución para ω^2 involucra los dos casos., $\omega > \omega_0$ y $\omega < \omega_0$.