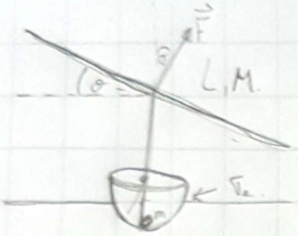
P7.



Area que cubre la hélice: πL^2

Volumen desplazado en un tiempo t: $v_0 \cdot t \cdot \pi L^2$

Masa desplazada: $\rho_A \cdot v_0 \cdot t \cdot \pi L^2$

$$\Delta p = \rho_A v_0 t \pi L^2 \cdot v_0 - 0 = \rho_A v_0^2 \pi L^2 t$$

$$F \cdot t = \Delta p \Rightarrow \boxed{F = \rho_A v_0^2 \pi L^2}$$

Por 3ª Ley de Newton, la fuerza a las partículas es igual a la fuerza a la hélice.

$$\sum \vec{F} = \overset{\text{Empuje}}{E}\hat{j} - \underbrace{m}_{\text{masa pequeña}} g\hat{j} - \underbrace{r_e \cdot 2\pi r^2}_{\text{masa casquete}} g\hat{j} - \underbrace{M}_{\text{Masa hélice}} g\hat{j} + \rho_A v_0^2 \pi L^2 \cos(\theta)\hat{j} + \rho_A v_0^2 \pi L^2 \sin(\theta)\hat{i}$$

La única fuerza en $\hat{i}$ es $\rho_A v_0^2 \pi L^2 \sin(\theta)$, y queremos que esta sea máxima, luego buscamos $\sin(\theta)$ máximo. Lo anterior se tiene para θ máximo ($\theta \in [0, \pi/2]$).

Para θ máximo tenemos que $\cos(\theta)$ es min, y para lo anterior necesitamos Empuje máximo, lo cual se tiene cuando el casquete está completamente bajo el agua.

Luego:

$\vec{E} = \rho_A \cdot \frac{2}{3}\pi r^3 \cdot g\hat{j}$. Con lo que:

$\ddot{y} = 0$ porque si $\ddot{y} < 0$ casquete se hunde

Empuje máximo, lo cual se tiene cuando el casquete está completamente bajo el agua. Luego:

$\vec{E} = \rho_A \cdot \frac{2}{3}\pi r^3 \cdot g\hat{j}$. Con lo que:

$$\hat{j}\rfloor \quad \frac{\rho_A 2\pi r^3 g}{3} - mg - \sigma_c 2\pi r^2 g - Mg + \rho_A v_0^2 \pi L^2 \cos(\theta) = M_{tot}\ddot{y} = 0$$

$\ddot{y} = 0$ porque si $\ddot{y} < 0$ casquete se hunde. $\ddot{y} > 0$ el ángulo no es óptimo

$$\rho_A v_0^2 \pi L^2 \cos(\theta) = mg + 2\sigma_c \pi r^2 g + Mg - \frac{2\rho_A \pi r^3 g}{3} = g\left(m + 2\sigma_c \pi r^2 + M - \frac{2\rho_A \pi r^3}{3}\right)$$

$$\rho_A v_0^2 \pi L^2 \cos(\theta) = \frac{g}{3}\left(3m + 6\sigma_c \pi r^2 + 3M - 2\rho_A \pi r^3\right)$$

$$\cos(\theta) = \frac{g(3m + 3M + 6\sigma_c \pi r^2 - 2\rho_A \pi r^3)}{3\rho_A v_0^2 \pi L^2}$$

(i) $$\boxed{\theta = \operatorname{Arccos}\left(\frac{g(3m + 3M + 6\sigma_c \pi r^2 - 2\rho_A \pi r^3)}{3\rho_A v_0^2 \pi L^2}\right)}$$

$$\rho_A v_0^2 \pi L^2 \cos(\theta) = \frac{g}{3}\left(3m + 6\,\sigma_c \pi r^2 + 3M - 2\rho_A \pi r^3\right)$$

$$\cos(\theta) = \frac{g(3m + 3M + 6\sigma_c \pi r^2 - 2\rho_A \pi r^3)}{3\rho_A v_0^2 \pi L^2}$$

(i) $$\boxed{\theta = \operatorname{Arccos}\left(\frac{g(3m + 3M + 6\sigma_c \pi r^2 - 2\rho_A \pi r^3)}{3\rho_A v_0^2 \pi L^2}\right)}$$

(ii) $\hat{\imath}]\ M_{tot}\ddot{x} = \rho_A v_0^2 \pi L^2 \sin(\theta)$

$$\ddot{x} = \frac{\rho_A v_0^2 \pi L^2 \sin(\theta)}{M_{tot}} = \frac{\rho_A v_0^2 \pi L^2 \sin(\theta)}{(M + m + \sigma_c 2\pi r^2)}$$

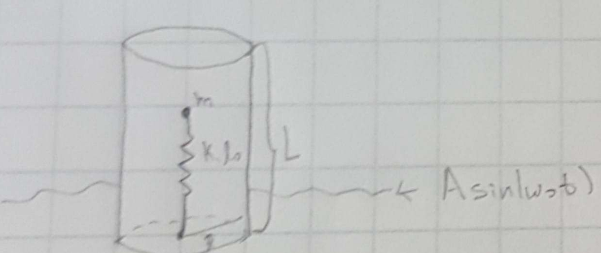
$$x_f = \cancelto{0}{x_0} + \cancelto{0}{v_0 \cdot t} + \frac{1}{2}\ddot{x}t^2 \Rightarrow 2d = \frac{\rho_A v_0^2 \pi L^2 \sin(\theta)\, t^2}{(M + m + 2\pi r^2 \sigma_c)}$$

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow t = \boxed{\sqrt{\frac{2d(M + m + 2\pi r^2 \sigma_e)}{\rho_A v_0^2 \pi L^2 \sin(b)}}} \quad \Big| \ \theta \text{ calculado en (i)}$$

P8.

$$\sum \vec{F} = \vec{E} - mg\hat{y} - (\pi R^2 \cdot \sigma + 2\pi R L \sigma)\cdot g\hat{y} = M_{tot}\cdot \ddot{y}$$



$$\vec{E} = (y - y_{base})\cdot \pi R^2 \cdot \rho_A \cdot g\,\hat{y}$$

$$= (A\sin(w_0 t) - y_{base})\pi R^2 \rho_A g\,\hat{y}.$$

Para simplificar el problema consideramos $M_{cilindro} >> m \Rightarrow y_{CM} = \frac{L}{2} = cte.$

$$\sum \vec{F} : (A\sin(w_0 t) - y_{base})\pi R^2 \rho_A g - (\pi R^2 + 2\pi R L)\sigma g - mg = M_{tot}\,\ddot{y}$$

$$\Rightarrow A\pi R^2 \rho_A g \sin(w_0 t) = y_{base}\pi R^2 \rho_A g + g\underbrace{(\pi R^2 + 2\pi R L + m)}_{M_{tot}} + M_{tot}\,\ddot{y}$$

$$\Rightarrow A\pi R^2 \rho_A g \sin(w_0 t) = y_{base}\pi R^2 \rho_A g + g\underbrace{(\pi R^2 + 2\pi RL + m)}_{M_{tot}} + M_{tot}\ddot{y}$$

$$A\pi R^2 \rho_A g \sin(w_0 t) = y_{base}\pi R^2 \rho_A g + M_{tot} g + M_{tot}\ddot{y}$$

$$A\pi R^2 \rho_A g \sin(w_0 t) = \pi R^2 \rho_A g \underbrace{\left(y_{base} + \frac{M_{tot}}{\pi R^2 \rho_A}\right)}_{\tilde{y}} + M_{tot}\ddot{y}$$

$$A\pi R^2 \rho_A g \sin(w_0 t) = \pi R^2 \rho_A g \tilde{y} + M_{tot}\ddot{\tilde{y}}$$

$$\boxed{\ddot{\tilde{y}} + \frac{\pi R^2 \rho_A g}{M_{tot}} \cdot \tilde{y} = \frac{A\pi R^2 \rho_A g}{M_{tot}} \sin(w_0 t)}$$ ← Oscilación forzada

(ii) Llamamos: $w^2 = \frac{\pi R^2 \rho_A g}{M_{tot}}$.

Luego:

$$\tilde{y} = B\cos(wt + \varphi) + \frac{F_0}{M} \cdot \frac{1}{(w^2 - w_0^2)} \cdot \sin(w_0 t - \delta).$$

$$\boxed{\ddot{\tilde{y}} + \frac{\pi R^2 \rho_A g}{M_{tot}} \cdot \tilde{y} = \frac{A \pi R^2 \rho_A g}{M_{tot}} \sin(w_0 t)}$$ ← Oscilación forzada

(ii) Llamamos: $w^2 = \frac{\pi R^2 \rho_A g}{M_{tot}}$.

Luego:

$$\tilde{y} = B\cos(wt + \varphi) + \frac{F_0}{M} \cdot \frac{1}{(w^2 - w_0^2)} \cdot \sin(w_0 t - \delta).$$

Nosotros nos podemos imponer la C.I., y podemos tomarlas tq $B=0$, ya que depende de como cae la botella en el mar.

$$\tilde{y} = \frac{A\pi R^2 \rho_A g}{M_{tot}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\pi R^2 \rho_A g}{M_{tot}} - w_0^2\right)} \cdot \sin(w_0 t - \delta)$$

$$\tilde{y} = \frac{A\pi R^2 \rho_A g \cdot \sin(w_0 t - \delta)}{(\pi R^2 \rho_A g - M_{tot} w_0^2)}$$

Tenemos que $\tilde{y} = y_{base} + \dfrac{M_{tot}}{\pi R^2 \rho_A}$

$$y_{base} = \frac{A\pi R^2 \rho_A g \sin(w_0 t - \delta)}{(\pi R^2 \rho_A g - M_{tot} w_0^2)} - \frac{M_{tot}}{\pi R^2 \rho_A}$$

Para que la botella nunca se hunda: $y_{base} > -L$. C.B.: $y_{base} = -L$

$$-L = \underbrace{\frac{A\pi R^2 \rho_A g \sin(w_0 t - \delta)}{(\pi R^2 \rho_A g - M_{tot} w_0^2)}}_{\text{Este valor es mínimo cuando } \sin(w_0 t - \delta) = -1} - \frac{M_{tot}}{\pi R^2 \rho_A}$$

$$\boxed{L_{min} = \frac{A\pi R^2 \rho_A g}{(\pi R^2 \rho_A g - M_{tot} w_0^2)} + \frac{M_{tot}}{\pi R^2 \rho_A}}$$

Notar que M_{tot} depende de L, por lo que hay que resolver la ec., dejarla planteada basta.

$$\frac{}{(\pi R^2 \rho_A g - M_{tot} w_0^2)} \qquad \frac{}{\pi R^2 \rho_A}$$

↳ por lo que hay que resolver la ec., pero dejarla planteada basta.

(iii) Tenemos que:

$$y_{base} = \frac{A\pi R^2 \rho_A g \sin(w_0 t - \delta)}{(\pi R^2 \rho_A g - M_{tot} w_0^2)} - \frac{M_{tot}}{\pi R^2 \rho_A}$$

δ es una ctte. conocida

$$m\ddot{y} = -mg - K(y - y_{base} - l_0) - \gamma_0 \dot{y}$$

$$\gamma\dot{y} + m\ddot{y} + mg + Ky - Kl_0 = K \cdot \left(\frac{A\pi R^2 \rho_A g \sin(w_0 t - \delta)}{(\pi R^2 \rho_A g - M_{tot} w_0^2)} - \frac{M_{tot}}{\pi R^2 \rho_A} \right)$$

$$\Rightarrow m\ddot{y} + mg - Kl_0 + Ky + \frac{KM_{tot}}{\pi R^2 \rho_A} + \gamma\dot{y} = \frac{KA\pi R^2 \rho_A g \sin(w_0 t - \delta)}{\pi R^2 \rho_A g - M_{tot} w_0^2}$$

$$\Rightarrow m\ddot{y} + \gamma\dot{y} + K\underbrace{\left(y - l_0 + \frac{mg}{K} + \frac{M_{tot}}{\pi R^2 \rho_A} \right)}_{\tilde{y}} = \frac{KA\pi R^2 \rho_A g \sin(w_0 \overbrace{(t - \frac{\delta}{w_0})}^{\tilde{t}})}{\pi R^2 \rho_A g - M_{tot} w_0^2}$$

$$\ddot{\tilde{y}} + \frac{\gamma}{m}\dot{\tilde{y}} + \frac{K\tilde{y}}{m} = \frac{KA\pi R^2 \rho_A g \sin(w_0 \tilde{t})}{m(\pi R^2 \rho_A g - M_{tot} w_0^2)}$$

$$\tilde{y} = C \cdot e^{-\frac{t}{2\tau}} \cos(\Omega t + \varphi) + \frac{KA + \pi R^2 \rho_A g \sin(w_0 \tilde{t} - \tilde{\delta})}{m(\pi R^2 \rho_A g - M_{tot} w_0^2)\sqrt{\left(\frac{K^2}{m^2} - w_0^2\right)^2 + \left(\frac{K}{m^2}\right)^2}}$$

Buscamos la sol. estacionaria $\Rightarrow$ $C e^{-\frac{t}{2\tau}} \cos(\Omega t + \varphi) = 0$

$$\tilde{y} = \frac{AK + \pi R^2 \rho_A g \sin(w_0 \tilde{t} - \tilde{\delta})}{m(\pi R^2 \rho_A g - M_{tot} w_0^2)\sqrt{\left(\frac{K^2}{m^2} - w_0^2\right)^2 + \left(\frac{K\gamma}{m^2}\right)^2}}$$

$$y = l_0 - \frac{mg}{K} - \frac{M_{tot}}{\pi R^2 \rho_A} + \frac{AK\pi R^2 \rho_A g \sin(w_0 \tilde{t} - \tilde{\delta})}{m(\pi R^2 \rho_A g - M_{tot} w_0^2)\sqrt{\left(\frac{K^2}{m^2} - w_0^2\right)^2 + \left(\frac{K\gamma}{m^2}\right)^2}}$$

y_{max} para $\sin(w_0 \tilde{t} - \tilde{\delta}) = 1$

$$y_{max} = l_0 - \frac{mg}{K} - \frac{M_{tot}}{\pi R^2 \rho_A} + \frac{AK\pi R^2 \rho_A g}{m(\pi R^2 \rho_A g - M_{tot} w_0^2)\sqrt{\left(\frac{K^2}{m^2} - w_0^2\right)^2 + \left(\frac{K\gamma}{m^2}\right)^2}}$$

La C. B. se tiene para $L = y_{max}$:

$L_{max} = l_0 - mg \quad - M_{tot} \quad AK\pi R^2 \rho_A g$

La C.B. se tiene para $L = y_{max}$:

$$\boxed{L_{2min} = l_0 - \frac{mg}{K} - \frac{M_{tot}}{\pi R^2 \rho_A} + \frac{A K_* R^2 \rho_A g}{m\left(\pi R^2 \rho_A g - M_{tot} w_0^2\right)\sqrt{\left(\frac{K^2}{m^2} - w_0^2\right)^2 + \left(\frac{\lambda \gamma}{m^2}\right)^2}}}$$

(iv) Para no perder el mensaje se debe cumplir (ii) y (iii) a la vez:

$$\boxed{L = \max\{L_{min}, L_{2min}\}}$$

P9. (i) Ya que en la parte (iii) se busca que el bloque se encuentre bajo el agua, consideraremos solo este caso. (Ya que se tiene $H - h < l$.)

DCL del cuerpo:

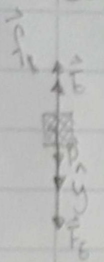
$$\sum \vec{F} = -K(H - y - l_0) + \underbrace{\rho \cdot l^3}_{\text{Masa del bloque}} g - l^3 \rho_A g - \gamma \cdot \dot{y} = \rho l^3 \ddot{y} \quad / \rho l^3 = m$$

$$-K(H - y - l_0) + mg - l^3 \rho_A g - \gamma \dot{y} = m\ddot{y} \quad / \text{En eq. } \dot{y} = 0 \wedge \ddot{y} = 0$$

$\max(L_{min}, L_{2min})$

P9. i) Ya que en la parte (iii) se basaa que el bloque se encuentre bajo el agua, consideraremos solo este caso. (Ya que se tiene $H-h<l_0$)

DCL del cuerpo:



$$\sum \vec{F} : -K(H-y-l_0) + \underbrace{\rho \cdot L^3}_{\text{Masa del bloque}} g - L^3 \cdot \rho_A \cdot g - \gamma \cdot \dot{y} = \rho L^3 \ddot{y} \quad / \rho L^3 = m$$

$$-K(H-y-l_0) + mg - L^3 \rho_A g - \gamma \dot{y} = m\ddot{y} \quad / \text{En eq. } \dot{y}=0 \wedge \ddot{y}=0$$

$$-K(H-y_{eq}-l_0) + mg - L^3 \rho_A g = 0$$

$$\Rightarrow -KH + Ky_{eq} + Kl_0 = L^3 \rho_A g - mg$$

$$y_{eq} = \frac{L^3 \rho_A g - mg + KH - Kl_0}{K} = \boxed{\frac{L^3 \rho_A g + KH - \rho L^3 g - Kl_0}{K}}$$

(ii)

$$\sum \vec{F} : -K(H + A\sin(w_0 t) - y - l_0) + mg - L^3 \rho_A g - \gamma \dot{y} = m\ddot{y}$$

$$\Rightarrow m\ddot{y} + \gamma \dot{y} + L^3 \rho_A g - mg + Ky + Kl_0 - KH = AK\sin(w_0 t)$$

$$m\ddot{y} + \gamma\dot{y} + L^3 \rho_A g - mg + Ky + Kl_0 - KH = AK\sin(w_0 t)$$

$$m\ddot{y} + \gamma\dot{y} + K\underbrace{\left(y + \frac{L^3 \rho_A g}{K} - \frac{mg}{K} + l_0 - H\right)}_{\tilde{y}} = AK\sin(w_0 t)$$

$$\boxed{m\ddot{\tilde{y}} + \gamma\dot{\tilde{y}} + K\tilde{y} = AK\sin(w_0 t)} \Rightarrow \boxed{\ddot{\tilde{y}} + \frac{\gamma}{m}\dot{\tilde{y}} + \frac{K}{m}\tilde{y} = \frac{AK}{m}\sin(w_0 t)}$$

(iii)

$$\tilde{y}(t) = B \cdot e^{-\frac{t}{2\tau}} \cos(\Omega t + \varphi) + \frac{AK\sin(w_0 t + \delta)}{m\sqrt{\left(\frac{K^2}{m^2} - w_0^2\right)^2 + \left(\frac{w_0}{\tau}\right)^2}}$$

En estado estacionario (el que nos interesa), el primer término es ≈0.

Scanned by CamScanner

$$y = \ldots \cos(\ldots t) + \frac{AK \sin(w_0 t - \delta)}{m\sqrt{\left(\frac{K^2}{m^2} - w_0^2\right)^2 + \left(\frac{w}{\tau}0\right)^2}}$$

En estado estacionario (el que nos interesa), el primer término es 0.

$$\tilde{y}(t) = \frac{AK \sin(w_0 t - \delta)}{m\sqrt{\left(\left(\frac{K^2}{m^2}\right) - w_0^2\right)^2 + \left(\frac{\gamma w_0}{m}\right)^2}}$$

$$y(t) = \frac{AK \sin(w_0 t - \delta)}{m\sqrt{\left(\frac{K^2}{m^2} - w_0^2\right)^2 + \left(\frac{\gamma w_0}{m}\right)^2}} + \frac{mg}{K} + H - l_0 - \frac{L^3 \rho_A g}{K}$$

Para que el bloque no salga del agua $y_{max} \leq h$

y_{max} se tiene para $\sin(w_0 t - \delta) = 1$, luego:

$$y_{max} = \frac{AK}{m\sqrt{\left(\frac{K^2}{m^2} - w_0^2\right)^2 + \left(\frac{\gamma w_0}{m}\right)^2}} + \frac{mg}{K} + H - l_0 - \frac{L^3 \rho_A g}{K} \leq h$$

Para que el bloque no salga del agua $y_{max} \leq h$

y_{max} se tiene para $\sin(\omega_3 t - \delta^{3}) = 1$, luego:

$$y_{max} = \frac{AK}{m\sqrt{\left(\frac{K^2}{m^2} - \omega_3^2\right)^2 + \left(\frac{\gamma\omega_3}{m}\right)^2}} + \frac{mg}{K} + H - l_0 - \frac{L^3\rho_A g}{K} \leq h$$

$$\boxed{A \leq \frac{\left(h + l_0 + \frac{L^3\rho_A g}{K} - \frac{mg}{K} - H\right) \cdot m\sqrt{\left(\frac{K^2}{m^2} - \omega_3^2\right)^2 + \left(\frac{\gamma\omega_3}{m}\right)^2}}{K}}$$

(iv) El gráfico es el de un amortiguado cualquiera :D

Scanned by CamScanner