Resumen Examen

Profesor: María Luisa Cordero
Auxiliares: Natalia Díaz, Hojin Kang, Miguel Letelier

19 de diciembre de 2016

Resumen para Examen

Unidad 1: Métodos experimentales

Si tenemos un conjunto de n datos, denominados x_i, $i\epsilon\{1, ..., n\}$ tenemos que:

$\langle x \rangle = \frac{1}{n} * \sum x_i$: la **media** de los datos
$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} * \sum (x_i - \langle x \rangle)^2}$: la **desviación estándar**, la cual es una medida de que tan disperso se encuentran los datos.

Recordar que 68 % de los datos se encuentran en $[\langle x \rangle - \sigma, \langle x \rangle + \sigma]$, mientras que 95 % de los datos se encuentran en $[\langle x \rangle - 2\sigma, \langle x \rangle + 2\sigma]$.

Al escribir los datos obtenidos, lo hacemos de la forma:

$A = \langle A \rangle \pm \triangle A$, donde $\triangle A$ es el **error absoluto**.
A partir de lo anterior definimos el **error relativo** como: $\varepsilon_A = \frac{\triangle A}{A}$

Al operar datos con errores, tenemos que propagar errores, para lo cual se usan las siguientes formulas: (Sean $A = \langle A \rangle \pm \triangle A$, y $B = \langle B \rangle \pm \triangle B$)

$A + B = (\langle A \rangle + \langle B \rangle) \pm \sqrt{(\triangle A)^2 + (\triangle B)^2}$
$A - B = (\langle A \rangle - \langle B \rangle) \pm \sqrt{(\triangle A)^2 + (\triangle B)^2}$
$A * B = (\langle A \rangle * \langle B \rangle) \pm (\langle A \rangle * \langle B \rangle) * \sqrt{(\varepsilon_A)^2 + (\varepsilon_B)^2}$
$\frac{A}{B} = \frac{\langle A \rangle}{\langle B \rangle} \pm \frac{\langle A \rangle}{\langle B \rangle} * \sqrt{(\varepsilon_A)^2 + (\varepsilon_B)^2}$
$f(A) = f(\langle A \rangle) \pm (\frac{df}{dx})(\langle A \rangle) * \triangle A$

Unidad 2: Métodos numéricos

Discretización temporal: Corresponde al proceso en el cual se toman ciertos puntos de una función continua, para transformarlo en una función discreta. Entre otras razones, uno de los principales objetivos de la discretización temporal es poder analizar la función mediante un computador (lo cual no es posible con funciones continuas, ya que no se pueden tomar los infinitos puntos de ésta en un computador)

Para el análisis de nuestra función discretizada son utiles las siguientes expresiones para las derivadas de una funcón discreta:

$\dot{x}(t_i) = \frac{x_{i+1} - x_i}{\triangle t}$, que es conocida como la **derivada hacia adelante.**
$\dot{x}(t_i) = \frac{x_i - x_{i-1}}{\triangle t}$, que es conocida como la **derivada hacia atras.**
$\dot{x}(t_i) = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\triangle t}$, que es conocida como la **derivada centrada.**

$\ddot{x}(t_i) = \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{\triangle t^2}$, que es conocida como la **derivada centrada de segundo orden.**

Método de Verlet: El Método de Verlet corresponde a un Método (valga la redundancia xD), el cual tiene como objetivo encontrar x_i como función de x anteriores (es decir en función de x_k donde $k < i$). Este método es muy útil cuando utilizamos un computador, ya que si le entregamos las condiciones iniciales, y la expresión para x_i en función de los x anteriores, tendremos que el computador nos podrá entregar los valores para cualquier instante posterior. **Es importante notar que cuando hablamos de x no nos estamos refiriendo siempre a la posición, ya que el Método de Verlet se puede usar para cualquier variable dependiente de otra. De igual manera es importante no memorizar la fórmula que entrega el apunte para el Método de Verlet, es mucho mas útil entender el método en sí.** A continuación se presentará un ejemplo de como usar el Método de Verlet.

Imagine que tiene la siguiente ecuación diferencial: $\ddot{x} = a * \dot{x} + b * x + c$

Utilizamos las expresiones para $\ddot{x}$ y $\dot{x}$ que se entregaron prevíamente, con lo que obtenemos:

$\frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{\triangle t^2} = a * \frac{x_i - x_{i-1}}{\triangle t} + b * x_i + c$, notemos que utilizamos la expresión para derivada hacia atrás, para $\dot{x}$, pero es válido utilizar cualquiera de las 3 expresiones. A continuación despejamos x_{i+1} en función de x_i y x_{i-1}.

$x_{i+1} = 2x_i - x_{i-a} + a * \triangle t * x_i - a * \triangle t * x_{i-1} + b * \triangle t^2 * x_i + c * \triangle t^2$

Reordenando obtenemos:

$x_{i+1} = x_i * (2 + a * \triangle t + b * \triangle t^2) - x_{i-1} * (1 + a * \triangle t) + c * \triangle t^2$

Con lo cual el problema estaría resuelto. Notese que como x_{i+1} depende de x_i y x_{i-1}, necesitariamos x_1 y x_2 para poder usar el método y obtener expresiones de x posteriores.

Unidad 4: Sólido Rígido

Si el sólido rígido se compone de n cuerpos de masa m_i y posiciones de centro de masa x_i, tenemos que la posición del centro de masa del sólido rígido es:
$X_{CM} = \frac{1}{\sum m_i} * \sum m_i * x_i$, donde: $\frac{1}{\sum m_i} = \frac{1}{M_{TOTAL}}$

Steiner: $I_p = I_{CM} + M * d^2$

Energía de un sólido rígido:
$E_{TOTAL} = E_K + E_P$
$E_K = \frac{I_P * \omega^2}{2}$, que se utiliza cuando el sólido rígido gira en torno a un punto fijo P
$E_K = \frac{I_{CM} * \omega^2}{2} + \frac{M * V_{CM}^2}{2}$ que se utiliza en el caso general

Momento angular:
$\vec{L} = m\vec{r}x\vec{v}$ es el momento angular de una partícula
$\vec{L_O} = I_O * \vec{\omega}$ es el momento angular de un sólido rígido que gira en torno al punto fijo O
$\dot{\vec{L_O}} = I_O * \dot{\vec{\omega}} = \Sigma\vec{\tau_O}$, donde O es un punto fijo.
La sumatoria de torques también se puede hacer desde el centro de masa, aunque este no sea un punto fijo:
$\dot{\vec{L_{CM}}} = \Sigma\vec{\tau_{CM}}$

Conservación del momento angular: Recordar que siempre que el torque exterior a nuestro sistema sea 0, tenemos que se conserva el momento angular, es decir $\vec{L} = cte$. Lo anterior se puede ver de que si el torque externo es 0, se tiene que $\dot{\vec{L_O}} = 0$ de lo cual se obtiene que el momento angular es constante.

Rodadura perfecta: La condición de rodar sin resbalar, nos dice que:
$\delta x = R * \delta\phi$, lo cual nos dice que al moverse un poco el sólido (δx), lo que recorre viene dado por el arco de circunferencia que esta cubriendo ($R * \delta\phi$).
A partir de lo anterior, dividiendo en ambos lados por δt se obtiene:
$\dot{x} = v = R * \dot{\phi} = R * \omega$
$\ddot{x} = a = R * \ddot{\phi} = R * \alpha$
OJO: Dependiendo de la forma en la que se tome el eje de coordenadas, puede ser necesario agregar un $-$ en algunas de las expresiones anteriores.

Unidad 5: Oscilaciones

Oscilaciones Simples:
Se busca llegar a una expresión de la forma:
$\ddot{x} + \omega^2 * x = 0$, donde x puede ser cualquier paramentro que describa el movimiento.
Los métodos mas comunes para llegar a este tipo de expresión es usar **2da Ley de Newton** (generalmente se usa en el caso puntual, en el que no son sólidos rígidos), **Sumatoria de Torques** (se usa en el caso en el que son sólidos rígidos, **Conservación de la Energía** (Generalmente es la forma mas fácil de llegar a la expresión, pero hay que asegurarse de que se conserva la energía, y luego se deriva la expresión en función del tiempo)
Luego de llegar a la expresión, se tiene que la solución de la ecuación es: $x(t) = Acos(\omega t + \phi) = Asin(\omega t + \psi)$, donde A, ϕ, ψ son constantes que se deben encontrar de las condiciones iniciales del problema.

Oscilaciones Amortiguadas:
En el caso de las oscilaciones amortiguadas, se busca llegar a una expresión de la forma:
$\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{\tau} + \omega^2 * x = 0$, donde al igual que en el caso de las oscilaciones simples, x es un parametro que describe el movimiento del cuerpo.
En el caso de oscilaciones amortiguadas se usa **2da Ley de Newton**, para legar a la expresión en la **MAYORIA** de los casos (no en todos los casos).
A partir de la ecuación anterior, la solución es:
$x(t) = A * e^{\frac{-t}{2\tau}} * cos(\Omega t + \psi)$, donde $\Omega^2 = \omega^2 - (\frac{1}{2\tau})^2$
Al igual que en oscilaciones simples, A y ψ son constantes que se determinan de las condiciones del problema.

Oscilaciones Forzadas:
En los problemas de Oscilaciones Forzadas, se busca llegar a una expresión de la forma:
$\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{\tau} + \omega_0^2 * x = \frac{F_0}{M} * sin(\omega t)$
Notar que la fuerza F_0 puede no estar explicita, lo cual se puede observar en el problema 7 de este trabajo dirigido.
La solución de la ecuación anterior es:
$x(t) = A * e^{\frac{-t}{2\tau}} * cos(\Omega t + \psi) + \frac{\frac{F_0}{M}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega}{\tau})^2}} * sin(\omega t - \delta)$
Donde: $\Omega^2 = \omega^2 - (\frac{1}{2\tau})^2$ y $tg(\delta) = \frac{\omega}{\tau(\omega_0^2 - \omega^2)}$
Al igual que antes A y ψ vienen determinados por las condciones del problema.
La **frecuencia de resonancia** (ω_r) es la frecuencia a la cual la amplitud en estado estacionario (luego de que ha transcurrido una gran cantidad de tiempo) es máxima, y viene dada por:
$\omega_r^2 = \omega_0^2 - 2 * (\frac{1}{2\tau})^2$

Unidad 6: Ondas

Ondas Propagativas

Una onda se puede describir mediante lo que se conoce como la **Ecuación de Onda**. Esta tiene la expresión general:

$\frac{d^2u}{dt^2} = c^2 * \frac{d^2u}{dx^2}$.

Donde tendremos que u es el parametro que describe la onda para una cierta posición x en un instante t. En los ejemplos vistos en clases tendremos que u corresponde en la altura de la cuerda (cuando la onda se propaga mediante una cuerda), mientras que en el ejemplo de las varillas visto en el laboratorio u correspondería al ángulo que forman las varillas.

El otro término interesante de la ecuación es c, el cual es la **velocidad de la onda**. Nos indica, como indica su nombre, con que velocidad se esta propagando la onda.
En los ejemplo vistos en clases tenemos que $c = \sqrt{\frac{T*\triangle^2}{I}}$ en el caso de las varillas que giran, donde T es la tensión de la cuerda que une las varillas, $\triangle$ es la separación de las varillas, e I es el momento de inercia de las varillas.
En el caso de la cuerda tenemos que $c = \sqrt{\frac{T}{\rho_L}}$, donde tenemos que T es la tensión de la cuerda, mientras que ρ_L es la densidad de la cuerda utilizada.
Notemos que en ambos casos c depende de las condiciones del sistema, y no de la forma de la onda en sí. Esto último nos dice que **la velocidad de la onda es una propiedad del medio, y no de la onda en sí**.

Finalmente una propiedad que es importante recordar es que al pasar de un medio a otro una onda **matiene su frecuencia (y por ende su período),** pero **cambia su longitud de onda.** Recordando que el producto de la frecuencia y la longitud de onda corresponde a otra expresión para c, tendremos que si se mantiene la frecuencia y cambia la longitud de onda al pasar de un medio a otro **la velocidad de la onda (c) también cambia.**
Nota: La frecuencia y período de la onda se mantienen aun cuando se cambia el medio, ya que corresponden a propiedades que les da la perturbación que crea la onda, y no propiedades de la onda en sí.

Solución de D'Alambert: La Solución de D'Alambert corresponde a un tipo de solución de la ecuación de onda planteada prevíamente. Esta solución viene dada por:
$u(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$, donde f y g son funciones cualquiera.

Notemos que cuando decimos que f y g son funciones cualquiera, incluimos el caso en los que f o g son 0, por lo que en particular $u(x,t) = f(x - ct)$ y $u(x,t) = g(x + ct)$ son soluciones de la ecuación de onda.

Una forma de entender la Solución de D'Alambert es como 2 ondas separadas, una es $f(x - ct)$ y la otra $g(x + ct)$. Notemos que al tener la expresión $(x - ct)$, $f(x - ct)$ corresponde a una onda que se mueve hacia la derecha, mientras que $g(x + ct)$ corresponde a una onda que se mueve hacia la izquierda.

Ondas armónicas

Cuando hablamos de ondas armónicas estamos considerando el caso en el que la onda tiene forma:
$y(x,0) = A * sin(\frac{2*\pi*x}{\lambda})$, es decir la onda tiene forma sinusoidal en el instante $t = 0$.
Aquí podemos utilizar la Solución de D'Alambert que explicamos anteriormente para obtener la siguiente expresión (la matraca de como se llega a la expresión se encuentra en la página 168 del apunte si la quieren leer :D):

$y(x,t) = A * sin(kx - \omega t - \phi)$

Tenemos que $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ claramente la longitud de onda, ω es la frecuencia angular, es decir $\omega = \frac{2\pi}{T}$, y ϕ es simplemente el desfase que tiene la onda.

Recordemos de la parte de Ondas Propagativas que $c = \lambda * f$, f la frecuencia de la onda. Usando $f = \frac{1}{T}$ tenemos que $c = \frac{\lambda}{T}$. De las expresiones de ω y k también es directo ver que $\frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = c$. Ya que c es una constante tenemos que para un valor fijo de ω se tendrá un valor de k (y vice versa). La misma relación se tendrá entre λ y T.

Todo este análisis de ha realizado para cuerdas infinitas (lo cual claramente no ocurre en la realidad). Si estudiamos el caso de una cuerda semi finita (es decir finita en uno de sus extremos, e infinita en el otro. Sin perder generalidad podemos poner el extremo finito de la cuerda en la posición 0) tenemos que hay 2 casos interesantes:

Extremo fijo: Corresponde al caso en el que el extremo finito de la cuerda no se mueve. Claramente se debe cumplir que:

$y(0,t) = 0 \forall t$ debido a que el extremo fijo se debe encontrar siempre en la altura 0.

Usando la condición anterior y la solución de D'Alambert se deduce que (pagina 162 del apunte):

$g(x+ct) = -(f(-(x+ct)))$. Por lo que si utilizamos la solución de D'Alambert obtenemos que:

$y(x,t) = f(x-ct) - (f(-(x+ct)))$ es la solución de la ecuación de onda.

Extremo móvil: Corresponde al caso en el que el extremo finito de la cuerda se puede mover. En este caso ya no se cumple la igualdad del Extremo fijo, ya que la cuerda se puede mover, pero se debe cumplir que:

$\frac{\partial y(0,t)}{\partial x} = 0 \forall t$. Lo que nos dice esta igualdad es que el extremo finito de la cuerda siempre se encuentra horizontal.

Utilizando la condición anterior y la Solución de D'Alambert (pagina 162 del apunte) se deduce que:

$g(x+ct) = f(-(x+ct))$. Por lo que la Solución de D'Alambert nos queda:

$y(x,t) = f(x-ct) + f(-(x+ct))$

Notemos que de las condiciones de las soluciones de la ecuación de onda podemos deducir que en ambos casos, extremo movil y extremo fijo el pulso se refleja al llegar al extremo finito. La diferencia se encuentra en que en el extremo fijo el pulso se refleja tanto respecto a la horizontal como respecto a la vertcal, mientras que en el extremo movil se refleja tan solo respecto a la vertical.

Ondas Estacionarias

Vimos que cuando se generan ondas estacionarias, estas cumplen la ecuación $y(x,t) = A * sin(kx - \omega t - \phi)$. Si generamos ondas armónicas en una cuerda semi-finita en uno de sus extremos, además se debe cumplir que $y(x,t) = f(x-ct) - (f(-(x+ct)))$. Por lo tanto obtenemos que:
$y(x,t) = A*sin(kx-\omega t-\phi) - A*sin(-(kx-\omega t-\phi)) = 2*A*sin(kx-\omega t-\phi) = 2*A*sin(kx)cos(\omega t+\phi))$

Con lo anterior tenemos que en este caso particular tenemos la dependencia del tiempo separado de la dependencia de la posición. Ya que el término $sin(kx)$ es la dependencia de la posición, mientras que $cos(\omega t + \phi)$ es la dependencia del tiempo.

Modos normales de cuerda finita:

Finalmente se estudia el caso en el que la cuerda es finita, y fija en ambos extremos. Al ser fija en los dos extremos debe cumplir trivialmente la condición:

$y(x_i,t) = y(x_f,t) = 0 \forall t$

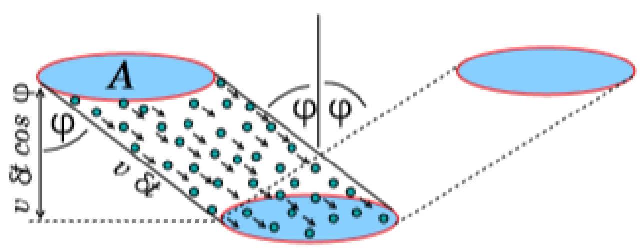
Debido a la condición anterior, la cuerda ya no puede vibrar con cualquier frecuencia (y por ende no puede vibrar con cualquier longitud de onda). Las frecuencias y longitudes de onda posibles vienen dadas por los modos normales de la cuerda, por lo que la frecuencia y longitud de onda de la cuerda deben cumplir:

$\lambda_n = \frac{2L}{n}$
$f_n = \frac{nc}{2L}$

Donde tenemos que n, representa el n-esimo modo normal de la cuerda (basicamente corresponde al número de antinodos que tiene la onda cuando vibra), c corresponde a la velocidad de la cuerda (que recordemos depende solo de las condiciones del medio), y L corresponde al largo de la cuerda.

Unidad 7: Hidrostática

Fuerza Colisional: Para definir la fuerza colisional consideramos el problema en el que tenemos un chorro de partículas con densidad uniforme (la densidad es igual en todas las partes del chorro) ρ, misma rapidez al momento de chocar con la superficie v, que después del choque las partículas salen con el mismo angulo respecto a la vertical φ con el que entraron, y que además salen con la misma rapidez con la que entraron (ver Figura).



Bajo los supuestos anterior definimos la Fuerza Colisional ($\overrightarrow{F}_{col}$) como la fuerza media que provoca el cambio de momentum de las partículas, y cumple la fórmula:

$\overrightarrow{F}_{col} = 2\rho A v^2 cos^2(\varphi)\hat{n}$

Donde ρ es la densidad, v es la RAPIDEZ, φ es el entre el chorro y el vector normal a la superficie, y $\hat{n}$ es el vector normal a la superficie. Notemos que claramente la Fuerza Colisional se debe encontrar apuntando en $\hat{n}$, ya que la componente normal a la superficie de la velocidad es la única que cambia, mientras que la tangente a la superficie se mantiene constante.

A partir de la definición anterior podemos definir la **Presión Colisional** que corresponde a la Presión que ejercen el chorro de partículas sobre la superficie. Por 3ra Ley de Newton tenemos que la fuerza que se le aplica al chorro de partículas, es el mismo que el chorro de partículas ejerce sobre la superficie. Luego la expresión de la Presión Colisional será:

$P_{col} = \frac{F_{col}}{A} = 2\rho v^2 cos^2(\varphi)$

En la expresión anterior usamos la fórmula para la **Presión** que corresponde a la Fuerza ejercida por unidad de área:

$P = \frac{F}{A}$ y se mide en Pascales (Pa)

Es claro que si nos encontramos bajo un cierto fluido (por ejemplo si nos encontramos nadando en el mar), vamos a sentir una mayor Presión que en la superficie. Esto se debe a que tendremos una mayor masa de partículas ejerciendo fuerza sobre nosotros. La expresión para la Presión al encontrarnos a una altura h bajo un fluido es:

$P = P_0 + \rho_f * g * h$

Donde P_0 es la presión en la superficie, y ρ_f es la densidad del fluido.

Principio de Pascal: El Principio de Pascal nos dice que la Presión ejercicida en un punto del fluido se transifere a todas las partes de éste. Esto es útil, ya que si tenemos 2 superficies que se pueden mover, unidas por un fluido se debe cumplir que:

$P_1 = P_2 => \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} => F_2 = F_1 * \frac{A_2}{A_1}$

Donde P_1 es la Presión sobre la primera superficie, P_2 es la Presión sobre la segunda superficie, F_1 es la Fuerza sobre la primera superficie, F_2 es la Fuerza sobre la segunda superficie, A_1 es el Área de la superficie 1, y A_2 es el Área de la superficie 2.

A partir de la última ecuación es trivial observar que si el Área de la superficie 2 es mucho mayor al de la superficie 1, y ejercemos una fuerza F_1, la fuerza sobre la segunda superficie F_2 será mucho mayor a la que se había ejercido inicilamente.

Principio de Arquimides: El Principio de Arquimides nos dice que al sumergir un cuerpo en un fluido aparece una fuerza de empuje que tiende a disminuir el peso aparente del cuerpo, fuerza que es igual al peso de fluido desplazado. En términos simples cuando se sumerge un cuerpo en un fluido aparece una fuerza de empuje en sentido contrario a la fuerza peso, y la fuerza de empuje tiene igual magnitud que el peso de fluido que se desplazo.

$E = P_{fluidodesplazado} = m_{fluidodesplazado} * g = \rho_f * V_S * g$

Donde ρ_f es la densidad del fluido y V_S es el Volumen del cuerpo que se encuentra sumergido en el fluido.

Cuando el cuerpo se encuentra flotando en el fluido llegamos a que se debe cumplir la igualdad:

$\frac{V_S}{V_0} = \frac{\rho_0}{\rho_f}$

Donde V_S es el Volumen del cuerpo que se encuentra sumergido en el fluido, V_0 es el Volumen total del cuerpo, ρ_0 es la densidad del cuerpo y ρ_f es la densidad del fluido.