

Trabajo Dirigido Control 2

Profesor: María Luisa Cordero

Auxiliares: Natalia Díaz, Hojin Kang, Miguel Letelier

24 de noviembre de 2016

Resumen para el Control 2

Si el sólido rígido se compone de n cuerpos de masa m_i y posiciones de centro de masa x_i , tenemos que la posición del centro de masa del sólido rígido es:

$$X_{CM} = \frac{1}{\sum m_i} * \sum m_i * x_i, \text{ donde: } \frac{1}{\sum m_i} = \frac{1}{M_{TOTAL}}$$

Steiner: $I_p = I_{CM} + M * d^2$

Energía de un sólido rígido:

$$E_{TOTAL} = E_K + E_P$$

$$E_K = \frac{I_P * \omega^2}{2}, \text{ que se utiliza cuando el sólido rígido gira en torno a un punto fijo } P$$

$$E_K = \frac{I_{CM} * \omega^2}{2} + \frac{M * V_{CM}^2}{2} \text{ que se utiliza en el caso general}$$

Momento angular:

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} \text{ es el momento angular de una partícula}$$

$$\vec{L}_O = I_O * \vec{\omega} \text{ es el momento angular de un sólido rígido que gira en torno al punto fijo } O$$

$$\vec{L}_O = I_O * \vec{\omega} = \Sigma \tau_O, \text{ donde } O \text{ es un punto fijo.}$$

La sumatoria de torques también se puede hacer desde el centro de masa, aunque este no sea un punto fijo:

$$\vec{L}_{CM} = \Sigma \tau_{CM}$$

Conservación del momento angular: Recordar que siempre que el torque exterior a nuestro sistema sea 0, tenemos que se conserva el momento angular, es decir $\vec{L} = cte$. Lo anterior se puede ver de que si el torque externo es 0, se tiene que $\vec{L}_O = 0$ de lo cual se obtiene que el momento angular es constante.

Rodadura perfecta: La condición de rodar sin resbalar, nos dice que:

$\delta x = R * \delta \phi$, lo cual nos dice que al moverse un poco el sólido (δx), lo que recorre viene dado por el arco de circunferencia que esta cubriendo ($R * \delta \phi$).

A partir de lo anterior, dividiendo en ambos lados por δt se obtiene:

$$\dot{x} = v = R * \dot{\phi} = R * \omega$$

$$\ddot{x} = a = R * \ddot{\phi} = R * \alpha$$

OJO: Dependiendo de la forma en la que se tome el eje de coordenadas, puede ser necesario agregar un $-$ en algunas de las expresiones anteriores.

Oscilaciones Simples:

Se busca llegar a una expresión de la forma:

$$\ddot{x} + \omega^2 * x = 0, \text{ donde } x \text{ puede ser cualquier paramentro que describa el movimiento.}$$

Los métodos mas comunes para llegar a este tipo de expresión es usar **2da Ley de Newton** (generalmente se usa en el caso puntual, en el que no son sólidos rígidos), **Sumatoria de Torques** (se usa en el caso en el que son sólidos rígidos), **Conservación de la Energía** (Generalmente es la forma mas fácil de llegar a la expresión, pero hay que asegurarse de que se conserva la energía, y luego se deriva la expresión en función del tiempo)

Luego de llegar a la expresión, se tiene que la solución de la ecuación es: $x(t) = A \cos(\omega t + \phi) = A \sin(\omega t + \psi)$, donde A , ϕ , ψ son constantes que se deben encontrar de las condiciones iniciales del problema.

Oscilaciones Amortiguadas:

En el caso de las oscilaciones amortiguadas, se busca llegar a una expresión de la forma:

$\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{\tau} + \omega^2 * x = 0$, donde al igual que en el caso de las oscilaciones simples, τ es un parametro que describe el movimiento del cuerpo.

En el caso de oscilaciones amortiguadas se usa **2da Ley de Newton**, para llegar a la expresión en la **MAYORIA** de los casos (no en todos los casos).

A partir de la ecuación anterior, la solución es:

$$x(t) = A * e^{\frac{-t}{2\tau}} * \cos(\Omega t + \psi), \text{ donde } \Omega^2 = \omega^2 - (\frac{1}{2\tau})^2$$

Al igual que en oscilaciones simples, A y ψ son constantes que se determinan de las condiciones del problema.

Oscilaciones Forzadas:

En los problemas de Oscilaciones Forzadas, se busca llegar a una expresión de la forma:

$$\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{\tau} + \omega_0^2 * x = \frac{F_0}{M} * \sin(\omega t)$$

Notar que la fuerza F_0 puede no estar explicita, lo cual se puede observar en el problema 7 de este trabajo dirigido.

La solución de la ecuación anterior es:

$$x(t) = A * e^{\frac{-t}{2\tau}} * \cos(\Omega t + \psi) + \frac{\frac{F_0}{M}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega}{\tau})^2}} * \sin(\omega t - \delta)$$

Donde: $\Omega^2 = \omega^2 - (\frac{1}{2\tau})^2$ y $\tan(\delta) = \frac{\omega}{\tau(\omega_0^2 - \omega^2)}$

Al igual que antes A y ψ vienen determinados por las condiciones del problema.

La **frecuencia de resonancia** (ω_r) es la frecuencia a la cual la amplitud en estado estacionario (luego de que ha transcurrido una gran cantidad de tiempo) es máxima, y viene dada por:

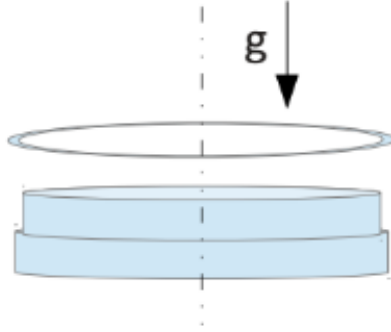
$$\omega_r^2 = \omega_0^2 - 2 * (\frac{1}{2\tau})^2$$

Problemas

1. La figura representa en la parte inferior un disco macizo de radio R y masa M uniformemente distribuida, que inicialmente rota con velocidad angular ω_0 en torno al eje vertical. Se puede despreciar el roce entre el disco y su suspensión. La parte superior representa un anillo de radio R y masa m inicialmente en reposo, el que se deja caer sobre el disco. Debido al roce cinético (caracterizado por un coeficiente μ), ambos cuerpos dejan de resbalar entre sí después de un tiempo t .

i) *Determine la velocidad angular del sistema cuando el disco y el anillo han dejado de resbalar entre sí (es decir, rotan en forma solidaria), y el tiempo t cuando esto ocurre.*

ii) *Considere que se tiene $m = M/4$, y que ω_0 y R son conocidos. Encuentre una expresión para obtener el coeficiente de roce μ en función del tiempo en que se demoran en dejar de resbalar el disco y el anillo t_f .*

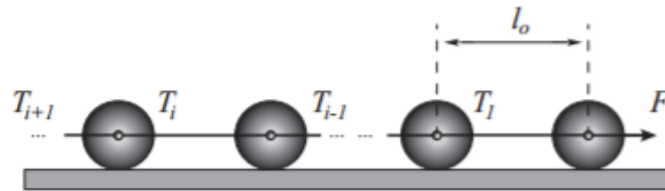


2. Una ardilla en su jaula se entretiene corriendo en su rueda de juegos, la que consiste en un tarro cilíndrico que puede girar sin roce en torno a su eje central, el que es sostenido desde el techo de la jaula. La masa de la ardilla es m y mueve sus patas de forma tal que su altura con respecto al punto más bajo de la rueda se mantiene constante e igual a h ($h < R$).

i) Determine la aceleración angular de la rueda

ii) Describa el movimiento de la ardilla desde el instante en que ella súbitamente se aferra firmemente a la rueda. En particular, bosqueje un gráfico de su nueva altura h vs tiempo, que mejor represente el movimiento de la ardilla. Suponga que justo antes de aferrarse la velocidad angular de la rueda era ω_0

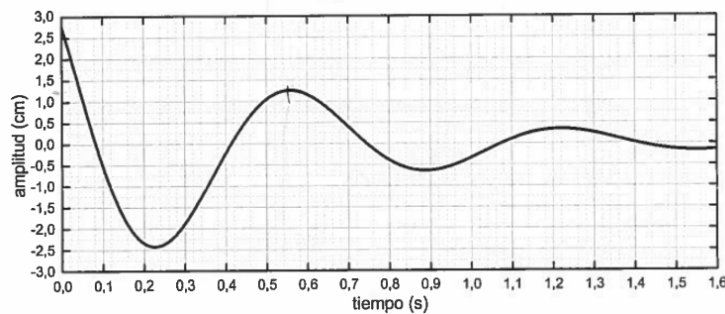
3. N cilindros de masa M y de radio R se amarran por sus centro geométricos uno después de otro con cuerdas sin masa, de largo $l_0 > 2R$, formando una cadena. La cadena estirada se coloca encima de una plataforma horizontal sobre la que cada cilindro puede rodar sin resbalar como se muestra en la figura. Si se tira la cadena desde el primer cilindro (el de más a la derecha) por medio de una fuerza F calcule la tensión de la cuerda que une al cilindro i con el cilindro $i+1$ -ésimo



4. Para el movimiento oscilatorio amortiguado de la figura, estime:

i) Los parámetros del sistema, es decir, el tiempo de atenuación, el período de oscilación y la frecuencia natural del sistema

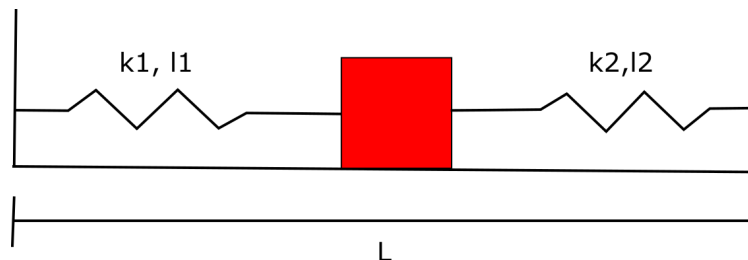
ii) Las condiciones iniciales, es decir, la posición y velocidad iniciales (o, alternativamente, la amplitud y la constante de fase). Para esto determina la posición y el tiempo del gráfico



5. Se tiene un péndulo simple de largo l y masa m que inicialmente se encuentra en reposo (es decir se encuentra paralelo a la vertical). Para el péndulo existe un coeficiente de roce viscoso b .

i) Si inicialmente se le da una velocidad v_0 al péndulo, encuentre la expresión para el ángulo que forma el péndulo con la vertical, considerando que v_0 es tal que las oscilaciones del péndulo son pequeñas

ii) Considere ahora el caso en el que se tiene una masa m unida a dos resortes de constantes elásticas k_1 y k_2 , y largos naturales l_1 y l_2 (como se muestra en la figura). La distancia entre las paredes es L ($L < l_1 + l_2$). Considere que el sistema se encuentra inicialmente en reposo, y que el coeficiente de roce viscoso para la masa es b . Si se le aplica una velocidad v_0 a la masa, encuentre una expresión para la posición de la masa.



6. Usted tiene un amigo de masa $M \gg 0$, con el cual decide ir a los columpios. Al llegar a éstos se da cuenta que los columpios son muy altos, y por ende no puede impulsarse con los pies, por lo que deciden turnarse empujando el uno al otro. El columpio en si tiene una masa m , y un largo l , y además existe un coeficiente de roce viscoso b . La fuerza máxima que usted puede ejercer es F_0 , fuerza con la cual solo puede mover en un pequeño ángulo a su amigo (ya que su amigo es muy pesado). Usted ejerce fuerza durante todo el movimiento del columpio, de tal manera que la fuerza ejercida sobre su compañero viene dado por: $F = A \sin(\omega t)$ (Puede considerar que F siempre se aplica perpendicular a las cuerdas del columpio)

i) Encuentre el valor de ω para el cual logra la amplitud máxima para su amigo, y calcule esta amplitud.

ii) Luego de que se alcanza esta amplitud máxima, usted deja de empujar a su compañero. Grafique el ángulo en el cual se encuentra su compañero en función del tiempo transcurrido desde que lo deja de empujar. Incluya valores que estime importantes en el gráfico.

7. Se tiene una masa m colgando del techo por un resorte de constante elástica k y largo natural l_0 . Existe roce viscoso para la masa, el cual se caracteriza por un coeficiente de roce b . Si inicialmente la masa se encuentra en equilibrio:

i) Encuentre la posición de equilibrio para la masa

ii) Debido a un terremoto el techo empieza a oscilar. La posición del techo debido a la oscilación viene dada por: $\vec{r}_t = A_0 \sin(\omega t)$. Considerando lo anterior, encuentre la ecuación de movimiento para la masa.

iii) Escriba la solución para la ecuación que se obtiene en (ii)

iv) Suponiendo que $\omega < \omega_r$, calcule el máximo valor que puede tomar ω para que la masa nunca alcance la altura que tenía el techo antes del terremoto.