Pauta Auxiliar #6

Tema:Torque, momento angular y rodadura

Auxiliares: Natalia Diaz, Hojin Kang & Miguel Letelier

18 de octubre de 2016

P1

a) Para esto ocuparemos que

$$\sum \tau_0 = \dot{\vec{L}} = I_0\ddot{\theta} \tag{1}$$

. Primero calculemos el momento de inercia:

$$I_0 = I_{barra} + I_P + I_Q$$

donde I_Q e I_P son los momentos de inercia de las particulas que se encuentran en Q y en P respectivamente.

$$I_0 = \frac{M(2L)^2}{12} + mL^2 + 2mL^2$$

$$= \frac{ML^2}{3} + 3mL^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{I}_0 = L^2(\tfrac{M}{3} + 3m)}$$

Luego reemplazando esto en (1) y obtenemos:

$$I_0\ddot{\phi} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

$$= L(sin\phi\hat{x} - cos\phi\hat{y}) \times 2mg(-\hat{y})$$

$$+L(-sin\phi\hat{x} + cos\phi\hat{y}) \times mg(-\hat{y})$$

$$= -2mgLsin\phi\hat{z} + mgLsin\phi\hat{z}$$

$$L^2(\frac{M}{3} + 3m) = -mgLsin\phi$$

$$\ddot{\phi} = -\frac{mg\cancel{L}sin\phi}{L^{\cancel{2}}(\frac{M}{3} + 3m)}$$

$$\boxed{\ddot{\phi} = -\frac{mgsin\phi}{L(\frac{M}{3}+3m)}}$$

b)
- Si $M \gg m$:

$$\Rightarrow \frac{m}{\frac{M}{3} + 3m} \longrightarrow 0$$

Si reemplazamos esto en la aceleración $\ddot{\phi}$ encontramos que $\ddot{\phi} \to 0$. Lo cual tiene sentido, ya que si la masa de la barra es mucho mayor que la de las masas en los extremos, entonces predomina la inercia de la barra y costará más mover la barra. Luego el sitema tiende al equilibrio ($\dot{\phi} = 0$ o $\dot{\phi} = cte.$)

- Ahora si $M \ll m$:

$$\frac{m}{\frac{M}{3} + 3m} \longrightarrow \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \ddot{\phi} = -\frac{1}{3L}gsin\phi$$

Lo cuál tiene la forma de la ecuación de un péndulo donde la cuerda mide $(3L)$.

P2

a) Este problema se puede abordar de dos formas distintas:

- **Forma 1:**
Tomar el punto para hacer torque en el punto de contacto de la cuerda con el eje que une los discos como se muestra en la figura 1. De esta forma notemos que la única fuerza que hace torque respecto a ese punto es el peso del sistema, luego:

$$\dot{\vec{L}} = \sum \vec{\tau}_0$$

$$I_0\ddot{\theta} = 2Mgr$$

$$\ddot{\theta} = \frac{2Mgr}{I_0}$$

donde $I_0 = I_{CM} + (2M)r^2 = MR^2 + 2Mr^2$:

$$\boxed{\ddot{\theta} = \frac{2gr}{MR^2+2Mr^2}}$$

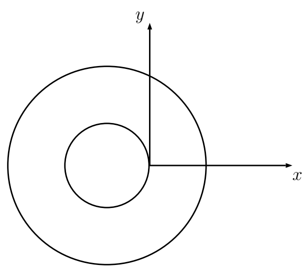

Figura 1:

- **Forma 2:**
Primero hacemos el DCL del sistema como se muestra en la figura 2:

$$\sum F_y = 2M\vec{a}$$

donde $\vec{a} = \ddot{y}(-\hat{y})$ es la aceleración vertical del sistema. Notando que como el hilo no resbala en el eje $\Rightarrow y = r\theta \Rightarrow \dot{y} = r\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{y} = r\ddot{\theta}$, entonces la ecuación anterior nos queda:

$$T\hat{y} - 2Mg\hat{y} = -2Mr\ddot{\theta}\hat{y} \quad (2)$$

$$\vec{T} = -2Mr\ddot{\theta} + 2Mg \quad (3)$$

Usando ahora la ecuación de torque:

$$\dot{\vec{L}}_{CM} = \vec{r} \times \vec{T}$$

$$MR^2\ddot{\theta} = r\hat{x} \times (-2Mr\ddot{theta} + 2Mg)\hat{y} \quad (4)$$

$$\ddot{\theta}(MR^2 + 2Mr^2) = 2Mgr$$

$$\boxed{\ddot{\theta} = \frac{2gr}{R^2+2r^2}}$$

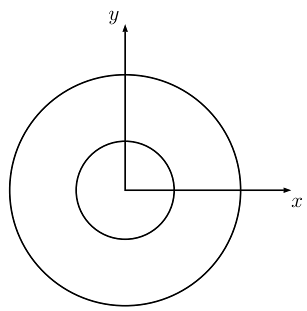

Figura 2:

Notar que durante la clase auxiliar el signo de la aceleración en la ecuación (2) estaba incorrecto por lo cual nos quedaba un signo cambiado, hay que ser siempre consistente: si decimos que la aceleración está en la dirección $-\hat{y}$ (se puede asegurar que $\vec{v}_y$ apunta hacia abajo si el sistema se suelta del reposo) entonces $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, como $\vec{p}$ es el momentum lineal, el cual apunta en la dirección de $\vec{v}$, en este caso hacia abajo entonces $\dot{L}$ apunta en la direccion positiva del eje z, de esta forma si derivamos respecto al tiempo, el término $I_0\ddot{\theta}$ apunta en la misma dirección (el movimiento del centro de masas es unidimensional). Por lo tanto si tomamos el signo de la aceleración lineal ($\ddot{y}$) distinto, también cambia el signo de $I_0\ddot{\theta}$.

b) Tomando el nivel de energia potencial $U_g = 0$ en $y = 0$, como el sistema se suelta del reposo $E_0 = 0$, luego a una altura cualquiera tenemos que la energía cinética está dada por $K = \frac{2M}{2}\dot{y}^2 + \frac{MR^2}{2}\dot{\theta}^2$ donde el primer término es la energía cinética lineal y el segundo corresponde a la energía asociada al movimiento de rotación.

Mientras que $U_g(y) = -2Mgy$, de esta forma notando que $\dot{y} = r\dot{\theta}$:

$$E_0 = E(y)$$

$$0 = Mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{MR^2}{2}\dot{\theta}^2 - 2Mgy$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2(\cancel{M}r^2 + \frac{\cancel{M}R^2}{2}) = 2\cancel{M}gy$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2gy}{2r^2 + R^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2gy}{2r^2+R^2}}}$$

P3

a) Este problema se puede abordar usando $\sum \vec{\tau} = \dot{\vec{L}}$ en este caso escogeremos por conveniencia calcular el torque en el punto de contacto del cilindro con el semicilindro. Calculando el momento de inercia:

$$I_0 = \underbrace{\frac{ma^2}{2}}_{I_{CM}} + \underbrace{ma^2}_{Steiner}$$

$$I_0 = \frac{3ma^2}{2}$$

En este caso la única fuerza que hace torque es el peso del cilindro, luego:

$$\frac{3ma^2}{2}\ddot{\phi} = mgasen\phi$$

Donde ϕ es el ángulo que barre el cilindro medido respecto a la vertical que pasa por su centro de masa (ver figura 3), la relación entre θ y ϕ se puede ver en la figura 3 y queda expresada por

$$R\theta = (\phi - \theta)a \quad / \cdot \frac{d^2}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{1}{a}(R + a)\theta$$

Luego:

$$\frac{3}{2a}ma(R + a)\ddot{\theta} = mgsen\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = \frac{2gsen\theta}{3(R+a)}}$$

b) Para resolver esto ocuparemos conservación de energía, donde pondremos el cero de energía potencial en $(R + a)\hat{y}$, luego, como soltamos el cilindro del reposo, la energía inicial está dada por $E_0 = 0$ y la energía en cualquier punto de la trayectoria está dado por:

$$E = \underbrace{\frac{m(a+R)^2\dot{\theta}^{2}}{4}}_{\frac{1}{2}m\vec{v}_{CM}} + \underbrace{\frac{ma^2\dot{\phi}^2}{4}}_{\frac{1}{2}I_0\dot{\theta}} = mg(R{+}a)(1{-}cos\theta)$$

Aquí usamos que

$\vec{v}_{CM} = (R+a)\dot{\theta}$

$$\frac{m(a+R)^2\dot{\theta}^2}{2} + \frac{m(a+R)^2\dot{\theta}^2}{4} = mg(R{+}a)(1{-}cos\theta)$$

$$\frac{3\dot{\theta}^2}{4} = g(R+a)(1-cos\theta)$$

$$\frac{3}{4}(\underbrace{\dot{\theta}(R+a)}_{v(\theta)})^2 = g(R+a)(1-cos\theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}(\theta) = \sqrt{\tfrac{4}{3}g(R+a)(1-cos\theta)}}$$