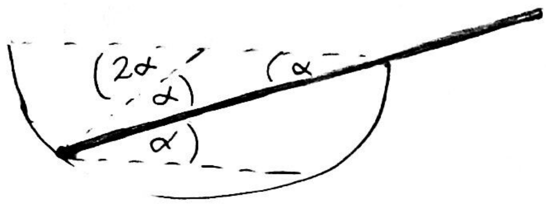
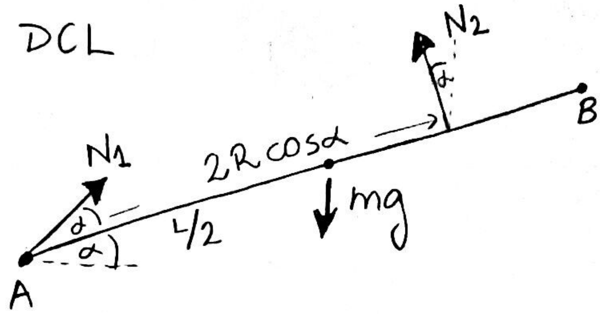
Clase auxiliar 4

P1.



DCL



En equilibrio, se cumple: $\sum \vec{F} = 0 \quad \sum \vec{T} = 0$

1) $\sum \vec{F}$

$\hat{x})$ $N_1 \cos 2\alpha - N_2 \operatorname{sen}\alpha = 0$ ①

$\hat{y})$ $N_1 \operatorname{sen} 2\alpha + N_2 \cos\alpha - mg = 0$ ②

2) $\sum \vec{T}$ (↺+)

(Con respecto al punto A)

$-mg\frac{L}{2}\cos\alpha + N_2 \cdot 2R\cos\alpha = 0$ ③

De ①
$$N_1 = \frac{N_2 \operatorname{sen}\alpha}{\cos 2\alpha}$$

En ②
$$\frac{N_2 \operatorname{sen}\alpha}{\cos 2\alpha} \cdot \operatorname{sen} 2\alpha + N_2 \cos\alpha - mg = 0$$

$$N_2 = \frac{mg}{\operatorname{sen}\alpha \cdot \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{\cos 2\alpha} + \cos\alpha}$$

En ③
$$\cos\alpha\left(-mg\frac{L}{2} + N_2 \cdot 2R\right) = \cos\alpha\left(-\cancel{mg}\frac{L}{2} + \frac{\cancel{mg}\, 2R}{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{tg} 2\alpha + \cos\alpha}\right) = 0$$

$\cos\alpha = 0 \quad \wedge \quad \frac{4R}{L} = \operatorname{sen}\alpha \operatorname{tg} 2\alpha + \cos\alpha$

$$\operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{sen}\alpha = \frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha} \cdot \operatorname{sen}\alpha = \frac{2(1-\cos^2\alpha)\cdot\cos\alpha}{2\cos^2\alpha - 1}$$

$\frac{4R}{L} = \Gamma$

$$r = \frac{2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha}{2\cos^2\alpha - 1} + \cos\alpha$$

$$r(2\cos^2\alpha - 1) = 2\cos\alpha - \cancel{2\cos^3\alpha} + \cancel{2\cos^3\alpha} - \cos\alpha$$

$$2r\cos^2\alpha - r - \cos\alpha = 0$$

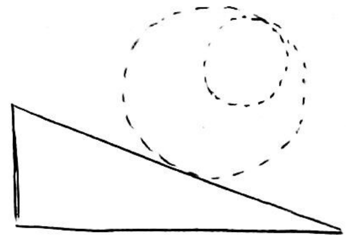
$$\cos\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2r^2}}{4r}$$

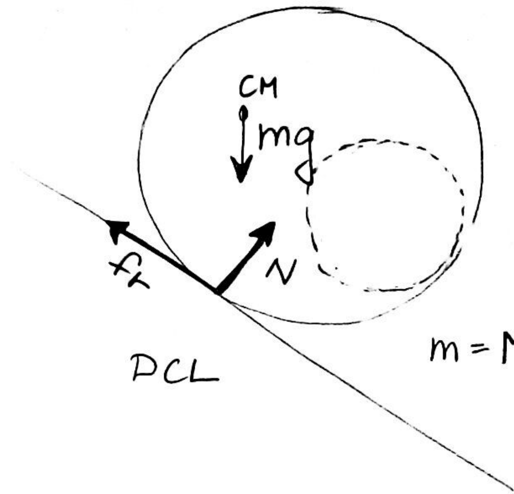
$\sqrt{1+8r^2} > 1$ Pero la geometría del problema nos dice que $\cos\alpha > 0$

Luego, la solución es

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{1 + \sqrt{1+8r^2}}{4r}}$$

P2





- Condición sobre θ para que exista equilibrio.

$m = M_{cilindro} - M_{HOYO}$

Para que haya equilibrio se debe cumplir

1) $\sum \vec{F} = 0$ y 2) $\sum \vec{T} = 0$

Fuerzas

1)
- $N - mg\cos\theta = 0$
- $fr - mg\,\text{sen}\,\theta = 0$

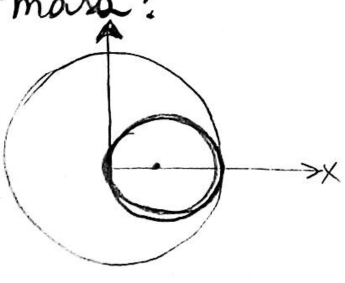
Por otro lado, $fr \leq \mu N \Rightarrow mg\,\text{sen}\,\theta = fr \leq \mu N$

$$mg\,\text{sen}\,\theta \leq \mu mg\cos\theta$$

$$\boxed{tg\,\theta \leq \mu}$$

Torques

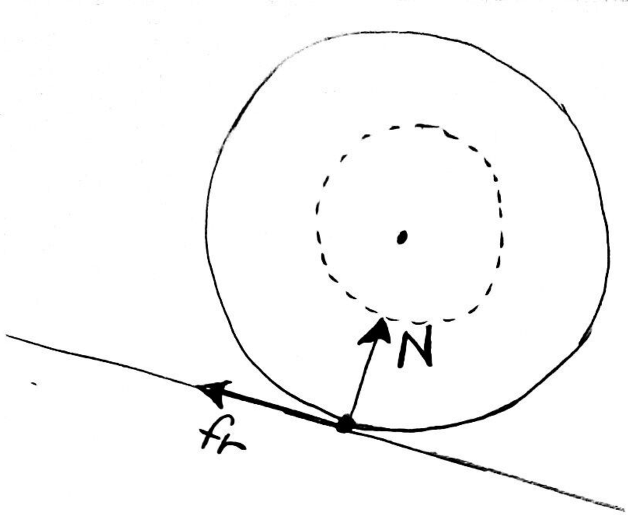
2) En primer lugar calcularemos la posición del centro de masa:



$$\left.\begin{array}{l} M = \pi R^2 h \rho \\ M_{Hoyo} = \pi \frac{R^2}{4} h \rho \end{array}\right\} \quad M = 4M_H$$

$$X_{cm} = \frac{0 \cdot 4M_H - \frac{R}{2} \cdot M_H}{3M_H} = -\frac{R}{6}$$

El agujero puede estar ubicado en cualquier posición lo que significa que el centro de masa puede estar ubicado en cualquiera de los puntos de la circunferencia de radio $R/6$



Si se calcula el torque con respecto al punto de apoyo, tanto la normal como el roce tendrán torque nulo.

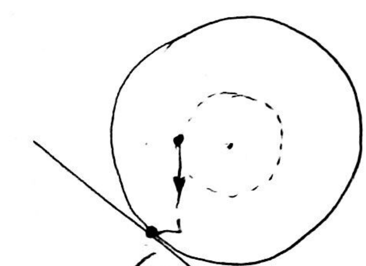
$$\underset{0}{\cancel{T_{fr}}} + \underset{0}{\cancel{T_{N}}} + T_{peso} = 0$$

$$T_{peso} = 0$$

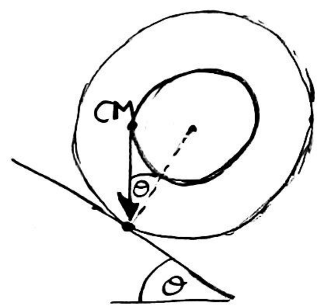
¿Qué debe ocurrir para que T_{peso} sea 0?

El peso debe caer radialmente hacia el punto de apoyo.

El caso crítico es



Si la inclinación es mucha, será imposible que el torque sea nulo.



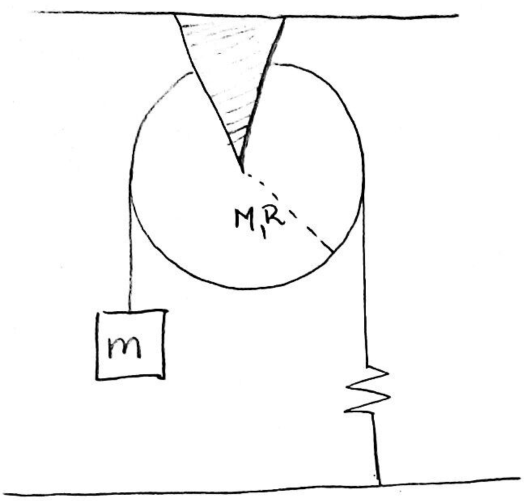
$$R \operatorname{sen}\theta \leq R_{cm}$$

$$R \operatorname{sen}\theta \leq R/6$$

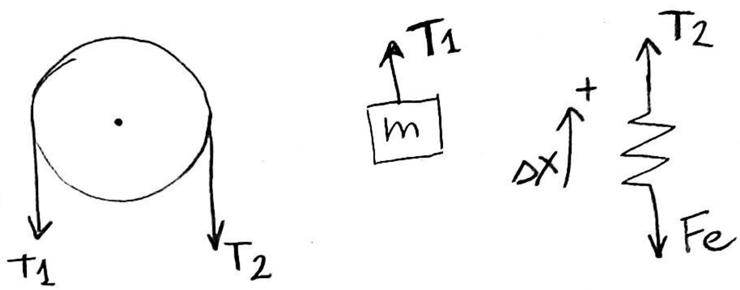
$$\boxed{\operatorname{sen}\theta \leq \frac{1}{6}}$$

- Se debe cumplir simultáneamente que $\operatorname{sen}\theta \leq \frac{1}{6}$ y $\operatorname{tg}\theta \leq \mu$

P3.



a) Posición de equilibrio



1) $T_1 - mg = ma$

2) $T_2 - k\Delta x = 0$

3) $T_1 R - T_2 R = I\ddot{\theta}$

si el sistema está en equilibrio $T_1 = mg$ y $\ddot{\theta} = 0$

Luego la ecuación 3) queda

$$(mg - k\Delta x)R = 0$$

$$\Delta x = \frac{mg}{k} \Rightarrow$$

En el equilibrio la deformación del resorte es $\Delta x = \frac{mg}{k}$

b) X max

Escogiendo la posición inicial como referencia para la energía potencial:

$E_i = 0$ $\qquad E_f = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 - mg\Delta x + \frac{1}{2}k\Delta x^2$

donde $\omega = \frac{v}{R}$ e $I = \frac{1}{2}MR^2$ (cilindro sólido)

En la elongación máxima $v = 0$ (y por lo tanto $\omega = 0$)

$E_i = E_f \qquad \Rightarrow \qquad -mg\Delta x + \frac{1}{2} k \Delta x^2 = 0$

$$\Delta x = 0 \quad \wedge \quad -mg + \frac{k\Delta x}{2} = 0$$

$$\boxed{\Delta x = \frac{2mg}{k}}$$

c) Velocidad de m cuando $\Delta x = \frac{mg}{k}$

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M \cancel{R^2} \cdot \frac{v^2}{\cancel{R^2}} - \frac{(mg)^2}{k} + \frac{1}{2} \cancel{k} \frac{(mg)^2}{k^{\cancel{2}}} = 0$$

$$v^2 \left(\frac{m}{2} + \frac{M}{4} \right) - \frac{(mg)^2}{k} = 0$$

$$\boxed{v^2 = \frac{4(mg)^2}{k(2m+M)}}$$

$$v = \frac{2mg}{\sqrt{k(2m+M)}}$$

P4. a) $\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{4}{9}\right) \sim 90° + 24° = 104°$

b) $\omega = \underbrace{\sqrt{\frac{g}{L}}}_{\text{Péndulo simple}} \sqrt{\frac{39}{105}}$