FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

FI1002-4
Sistemas Newtonianos
Profesor: Maria Luisa Cordero

Pauta Auxiliar # 3

Tema: Sistemas Extendidos y Estática

Auxiliares: Natalia Diaz, Hojin Kang & Miguel Letelier

22/09/2016

P1.

Podemos ver el sistema como 3 cilindros: el grande sin agujeros (completo), y dos pequeños, uno de radio r_1 y el otro r_2, notando que las densidades de masa de los agujeros es "negativa". Luego podemos calcular el centro de masas del sistema como:

$$\vec{CM}(\vec{r}) = \frac{M_0\vec{CM}_0 + M_1\vec{CM}_1 + M_2\vec{CM}_2}{M_0 + M_1 + M_2} \qquad (1)$$

Donde CM_0, CM_1, CM_2 son los centros de masa de los cilindros de radio R, r_1 y r_2 respectivamente, y $M_{0,1,2}$ las masas de dichos cilindros. Eligiendo nuestro sistema de referencia (cartesiano) en el centro geométrico del cilindro y notando que podemos girar el cilindro y dejar los circulos en la posición que más nos convenga (facilite el cálculo) y si queremos dejarlo finalmente girado en un ángulo β desde la horizontal nuestras componentes $\hat{x}$ e $\hat{y}$ quedan ponderados por un factor $cos(\beta)$ y $sen(\beta)$ respectivamente.En este caso dejaremos el centro cilindro del r_1 justo sobre el eje $\hat{y}$, entonces tenemos que $\vec{CM}_0 = 0\hat{x} + 0\hat{y} + 0\hat{z}$, $\vec{CM}_1 = 0\hat{x} + r\hat{y} + 0\hat{z}$ y $\vec{CM}_1 = rsen(\theta)\hat{x} + rcos(\theta)\hat{y} + 0\hat{z}$. Notar que todas las componentes en $\hat{z}$ son 0 luego podemos despreciarlos.

Para calcular M_1 y M_2 debemos calcular la densidad de masa del cilindro ρ.

$$\rho = \frac{M}{\pi R^2 H}$$

Luego usando que $\rho_1 = \rho_2 = -\rho$, tenemos que: $M_1 = -\frac{Mr_1^2}{R^2}$ y $M_2 = -\frac{Mr_2^2}{R^2}$

Volviendo a (1) y reemplazando los datos que calculamos tenemos:

$$CM = \frac{\cancelto{0}{M_0CM_0} + M_1CM_1 + M_2CM_2}{M_0 + M_1 + M_2}$$

$$= \frac{-\frac{Mr_1^2}{R^2}r\hat{y} - \frac{Mr_2^2}{R^2}(rsen(\theta)\hat{x} + rcos(\theta)\hat{y})}{M - \frac{Mr_1^2}{R^2} - \frac{Mr_2^2}{R^2}}$$

$$= -\frac{Mr}{R^2}\left(\frac{(r_1^2 + r_2^2cos(\theta))\hat{y} + r_2^2sen(\theta)\hat{x}}{M(1 - \frac{r_1^2+r_2^2}{R^2})}\right)$$

$$\Rightarrow CM = -r\left(\frac{r_2^2sen(\theta)\hat{x} + (r_1^2 + r_2"cos(\theta))\hat{y}}{R^2 - r_1^2 + r_2^2}\right)$$

P2.

Para resolver esto usaremos el mismo principio que en la P1:

$$CM = \frac{M_ICM_I + M_DCM_D}{M_I + M_D} \qquad (2)$$

Donde los sub-indices I y D se refieren a izquierda y derecha. De esta forma y ubicando nuestro sistema de referencia con origen en el vértice de la "V"tenemos: $CM_I = \frac{L}{2}\left(sen(\frac{\alpha}{2})(-\hat{x}) + cos(\frac{\alpha}{2})(-\hat{y})\right)$ y $CM_D = \frac{L}{2}\left(sen(\frac{\alpha}{2})\hat{x} - cos(\frac{\alpha}{2})\hat{y}\right)$. Calculando las masas: $M_I = \lambda_1 L$ y $M_D = \lambda_2 L$

Usando (2), tenemos:

$$CM = \frac{\frac{\lambda_1 L^2}{2}(-sen(\frac{\alpha}{2})\hat{x} - cos(\frac{\alpha}{2})\hat{y}) + \frac{\lambda_2 L^2}{2}(sen(\frac{\alpha}{2})\hat{x} - cos(\frac{\alpha}{2}))}{L(\lambda_1 + \lambda_2)}$$

$$= \frac{L^{\cancel{2}}}{2}\left(\frac{\hat{x}sen(\frac{\alpha}{2})(\lambda_2 - \lambda_1) - \hat{y}cos(\frac{\alpha}{2})(\lambda_2 + \lambda_1)}{\cancel{L}(\lambda_1 + \lambda_2)}\right)$$

$$\Rightarrow CM = \frac{L}{2}\left(\frac{\hat{x}sen(\frac{\alpha}{2})(\lambda_2-\lambda_1) - \hat{y}cos(\frac{\alpha}{2})(\lambda_2+\lambda_1)}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$$

$$\boxed{|CM| = \frac{L}{2}\sqrt{\frac{sen^2(\frac{\alpha}{2})(\lambda_2 - \lambda_1)^2 + cos^2(\frac{\alpha}{2})(\lambda_2 + \lambda_1)^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)}}}$$

P3.

Para resolver esto planteamos las condiciones de estática:

$$\sum \vec{F}_y = 0 \qquad (3)$$

$$\sum \vec{\tau} = 0 \qquad (4)$$

Ubicando el origen en el vértice de la barra y ocupando (4) :

$$\vec{CM} \times M_{barra}\vec{g} + \vec{b} \times M\vec{g} = 0 \qquad (5)$$

El vector posición del centro de masa de la barra lo obtenemos como en las preguntas anteriores:

$$\vec{CM} = \frac{\frac{10\cdot 2}{3}(-\frac{3}{2}cos(\frac{\pi}{4})\hat{x} - \frac{3}{2}sen(\frac{\pi}{4})\hat{y}) + \frac{10\cdot 1}{3}\frac{3}{2}\hat{x}}{10}$$

$$= \frac{\hat{x}(5 - 10cos(\frac{\pi}{4})) - 10sen(\frac{\pi}{4})\hat{y}}{10}$$

$$\overrightarrow{CM} = \hat{x}(0{,}5 - \frac{\sqrt{2}}{2}) - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{y}$$

Ahora reemplazando esto en (5) y recordando que $\hat{x} \times (\hat{y}) = \hat{z}$:

$$-\hat{z}(0{,}5 - \frac{\sqrt{2}}{2}) \cdot 10 \cdot 9{,}8 - \hat{z}9{,}8M = 0$$

$$\boxed{\Rightarrow M = \frac{-10(1-\sqrt{2})}{2}}$$

Luego usando (3) encontramos que $\vec{T} - M\vec{g} - m_b\vec{g} = 0 \quad \Rightarrow T = Mg + m_b g$, de esta forma evaluando el resultado encontrado de M:

$$\boxed{\Rightarrow T = 98\left(\frac{-(1-\sqrt{2})}{2} + 1\right)}$$

Notar que como $\sqrt{2} > 1$ la masa y tensión encontradas son positivas.

P4

a)Para esto ubicamos el origen en el pivote y usando (4):

$$a\hat{x} \times k\Delta x\hat{y} + \frac{L}{2}\hat{x} \times Mg(-\hat{y}) = 0$$

Donde $\Delta x = h - l_0$

$$ka\Delta x - \frac{LMg}{2} = 0$$

$$\Delta x = \frac{LMg}{2ka}$$

$$h - l_0 = \frac{LMg}{2ka}$$

$$\boxed{h = \frac{LMg}{2ka} + l_0}$$

b) Notar que en la ecuacion anterior si $a = 0$ entonces se $h = \infty$ lo cuál tiene sentido, ya que si $\vec{b}$ es nulo se necesita fuerza infinita para ejercer torque en la barra. Si $a = \frac{L}{2}$ entonces la fuerza necesaria para que la barra no se mueva debe ser igual al peso de la barra, luego $h = \frac{Mg}{k} + l_0$.

Finalmente si $a = L$ entonces $h = \frac{Mg}{2k} + l_0$