



Viga en medio elástico

Hipótesis:

Medio elástico, lineal, homogéneo, semi-infinito en ambas direcciones.

s : Asentamiento

K : Constante de balasto

P : Presión

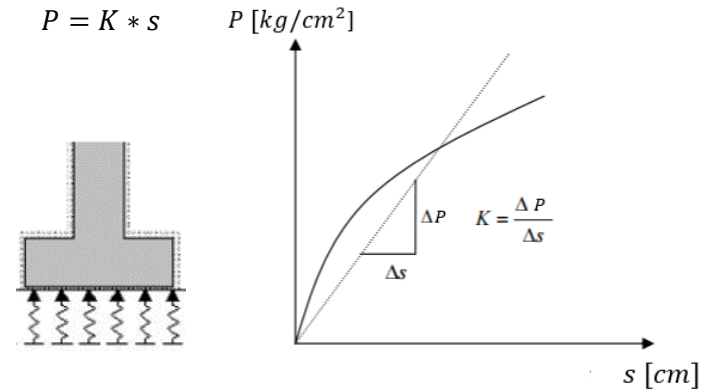


Figura 1 esquema para la deducción de la constante de balasto de un suelo

El medio se reemplaza por un conjunto de resortes, modelando un comportamiento elástico-lineal del suelo, de esta manera se puede determinar el comportamiento de la fundación.

1. Ecuación diferencial de la viga

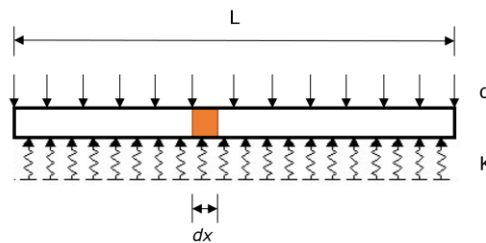


Figura 2 Elemento diferencial de una viga en un medio elástico sometida a una carga distribuida

K : constante de balasto (modulus of subgrade reaction)

b : ancho de la viga

dx : largo del elemento diferencial

q : carga distribuida sobre la viga

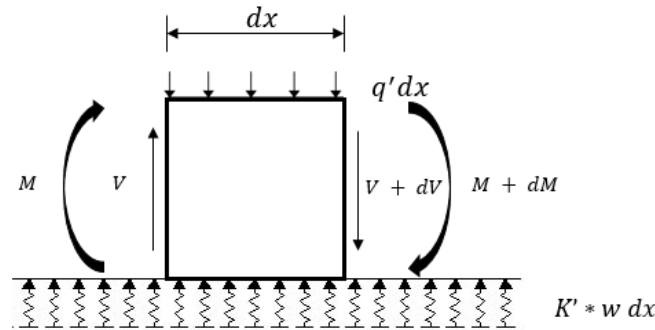


Figura 3 Análisis de fuerzas en el elemento diferencial de la viga

$$K' = K * b$$

$$q' = q * b$$

w: lo que se deforma la viga (flecha de la viga).

Se procede haciendo equilibrio de fuerzas en el elemento diferencial, para la componente vertical de la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.:**

$$\sum F_v = 0 = V - (V + dV) + K' * w * dx - q' dx$$

$$\frac{dV}{dx} = K' * w - q'$$

Para la viga de la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** se tiene: $V = \frac{dM}{dx}$

$$\frac{d^2M}{dx^2} = K' * w - q'$$

Además, de la ecuación para vigas de Euler-Bernoulli

$$-EI * \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right) = M$$

$$EI \frac{d^4w}{dx^4} = K' * w - q'$$

Con esto se obtiene la ecuación diferencial que relaciona la deflexión de la viga con la carga aplicada:

$$\frac{d^4w}{dx^4} + \frac{K' * w}{EI} - \frac{q'}{EI} = 0$$



Supongamos una viga en dos dimensiones, $q' = 0$ sin (sin perder generalidad)

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{K' * w}{EI} = 0$$

Se modela la deformación de la viga como: $w = e^{D*x}$

$$D^4 * e^{D*x} + \frac{K'}{EI} * e^{D*x} = 0$$

$$D^4 = -\frac{K'}{EI}$$

$$D_{1,2} = \pm \sqrt[4]{\frac{K'}{4EI}} * (i + 1)$$

$$D_{3,4} = \pm \sqrt[4]{\frac{K'}{4EI}} * (i - 1)$$

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{K'}{4EI}}$$

$$w = A_1 e^{\lambda(1+i)x} + A_2 e^{-\lambda(1+i)x} + A_3 e^{\lambda(1-i)x} + A_4 e^{-\lambda(1-i)x}$$

$$w = e^{\lambda x} (A_1 e^{\lambda x i} + A_4 e^{-\lambda x i}) + e^{-\lambda x} (A_2 e^{-\lambda x i} + A_3 e^{\lambda x i})$$

$$e^{\lambda x i} = \cos(\lambda x) + i * \sin(\lambda x)$$

$$e^{-\lambda x i} = \cos(\lambda x) - i * \sin(\lambda x)$$

$$w = e^{\lambda x} (\cos(\lambda x) (A_1 + A_4) + \sin(\lambda x) i * (A_1 - A_4)) \\ + e^{-\lambda x} (\cos(\lambda x) (A_2 + A_3) + \sin(\lambda x) i * (A_3 - A_2))$$

$$w = e^{\lambda x} (C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x)) + e^{-\lambda x} (C_3 \cos(\lambda x) + C_4 \sin(\lambda x))$$



Condición de borde $x \rightarrow \infty, w = 0$

$$w(x = \infty) = 0 = C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x)$$

$$\rightarrow C_1 = C_2 = 0$$

$$w = e^{-\lambda x} (C_3 \cos(\lambda x) + C_4 \sin(\lambda x))$$

Donde $\lambda = \sqrt[4]{\frac{K'}{4EI}}$

1.1. Viga flexible con carga puntual centrada.

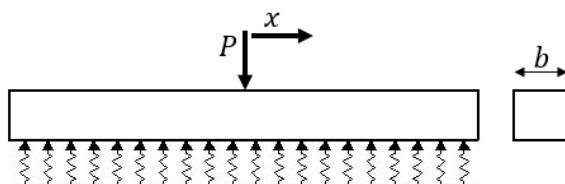


Ilustración 1 viga con carga puntual centrada

1era condición de borde, simetría:

$$w(x) = w(-x) \rightarrow \left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=0} = 0$$

$$w = e^{-\lambda x} (C_3 \cos(\lambda x) + C_4 \sin(\lambda x))$$

$$\frac{dw}{dx} = -\lambda e^{-\lambda x} C_3 \cos(\lambda x) + e^{-\lambda x} \lambda (-C_3 \sin(\lambda x) + C_4 \cos(\lambda x))$$

$$\left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=0} = 0 = \lambda (-C_3 \cos(\lambda x) + C_4 \cos(\lambda x))$$

$$\rightarrow C_3 = C_4 = C$$

$$w = e^{-\lambda x} * C * (\cos(\lambda x) + \sin(\lambda x))$$



2da condición de borde,

$$P = 2 * \int_0^{\infty} K' * w * dx$$
$$\rightarrow P = 2 * K' * C * \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} * (\cos(\lambda x) + \sin(\lambda x)) dx$$

Usando integración por partes:

$$u' = e^{-\lambda x}$$

$$u = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}$$

$$v = (\cos(\lambda x) + \sin(\lambda x))$$

$$v' = \lambda(\cos(\lambda x) - \sin(\lambda x))$$

$$(1) \quad \int \% = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} * (\cos(\lambda x) + \sin(\lambda x)) + \int e^{-\lambda x} (\cos(\lambda x) - \sin(\lambda x)) dx$$

$$u = e^{-\lambda x}$$

$$u' = -\lambda e^{-\lambda x}$$

$$v' = (\cos(\lambda x) + \sin(\lambda x))$$

$$v = \frac{1}{\lambda} (\sin(\lambda x) - \cos(\lambda x))$$

$$(2) \quad \int \% = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} * (\sin(\lambda x) - \cos(\lambda x)) + \int e^{-\lambda x} (\sin(\lambda x) - \cos(\lambda x)) dx$$

(1)+(2)

$$2 \int \% = -\frac{2}{\lambda} e^{-\lambda x} * \cos(\lambda x)$$

$$\rightarrow \int \% = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} * \cos(\lambda x)$$

$$P = 2 * K' * C * \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} * \cos(\lambda x) \right) \Big|_0^{\infty}$$

$$P = 2 * K' * C * \left(-0 + \frac{1}{\lambda} \right)$$



$$C = \frac{\lambda P}{2K'}$$

Se modela la deformación de la viga con carga puntual de la siguiente manera:

$$w = e^{-\lambda x} * \frac{\lambda P}{2K'} * (\cos(\lambda x) + \sin(\lambda x))$$

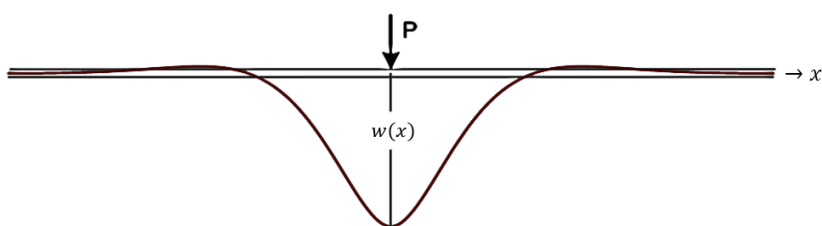


Figura 4 Carga puntual en viga infinita con su deformada

$$A = e^{-\lambda x} * (\cos(\lambda x) + \sin(\lambda x))$$

$$B = e^{-\lambda x} * \sin(\lambda x)$$

$$C = e^{-\lambda x} * (\cos(\lambda x) - \sin(\lambda x))$$

$$D = e^{-\lambda x} * \cos(\lambda x)$$

$$w = \frac{\lambda P}{2K'} * A$$

Además,

$$A'_{\lambda}(x) = -2\lambda B_{\lambda}(x)$$

$$B'_{\lambda}(x) = \lambda C_{\lambda}(x)$$

$$C'_{\lambda}(x) = -2\lambda D_{\lambda}(x)$$

$$D'_{\lambda}(x) = -\lambda A_{\lambda}(x)$$

$$\theta = \frac{dw}{dx} = \frac{\lambda P}{2K'} * \frac{dA_{\lambda}(x)}{dx} = \frac{\lambda P}{2K'} * -2\lambda B_{\lambda}(x)$$

$$\theta = -\frac{\lambda^2 P}{K'} * B_{\lambda}(x)$$



$$M = -EI \frac{d^2 w}{dx^2}$$

$$M = -EI \left(-\frac{\lambda^2 P}{K'} * \frac{dB_\lambda(x)}{d\lambda} \right)$$

$$M = -EI \left(-\frac{\lambda^2 P}{K'} * \lambda C_\lambda(x) \right)$$

$$M = EI \frac{\lambda^3 P}{K'} * C_\lambda(x) * \left(\frac{\lambda}{\lambda} \right)$$

Como,

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{K'}{4EI}}$$

$$\rightarrow M = EI * \frac{K'}{4EI} * \frac{P}{K' \lambda} * C_\lambda(x)$$

$$M = \frac{P}{4\lambda} * C_\lambda(x)$$

$$V = \frac{dM}{dx}$$

$$V = -\frac{P}{2} D_\lambda(x)$$



1.2. Viga con momento aplicado

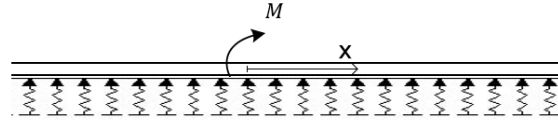


Figura 5 Viga con momento aplicado

Condiciones de borde:

Infinito: $x \rightarrow \infty, w = 0 \rightarrow C_1 = C_2 = 0$

Simetría: $w(x = 0) = 0 \rightarrow C_3 = 0$

Equilibrio en $x=0$ $M(x = 0) = \frac{M}{2} = EI \frac{d^2 w}{dx^2} \rightarrow C_4 = -\frac{M\lambda^2}{K}$

$$w = e^{\lambda x}(C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x)) + e^{-\lambda x}(C_3 \cos(\lambda x) + C_4 \sin(\lambda x)) = -\frac{M\lambda^2}{K} e^{-\lambda x} * \sin(\lambda x)$$

Siguiendo el mismo desarrollo que para la carga puntual,

Resultados:

$$w = -\frac{M\lambda^2}{K'} * B_\lambda(x)$$

$$\theta = -\frac{M\lambda^3}{K'} * C_\lambda(x)$$

$$M = \frac{M}{2} * D_\lambda(x)$$

$$V = -\frac{\lambda M}{2} * A_\lambda(x)$$

1.3. Viga con carga distribuida uniforme

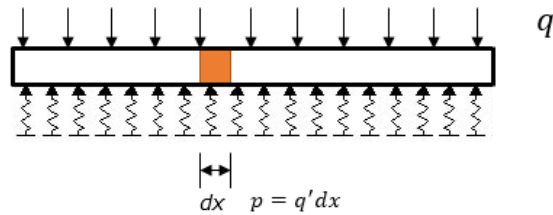


Figura 6 Elemento diferencial de una viga sometida a una carga distribuida uniforme

Tomemos elementos “dx” con lo que obtenemos pequeñas cargas puntuales

$$P = qdx$$

1.3.1. Punto bajo la carga uniforme

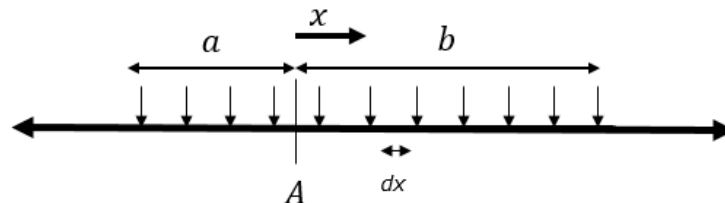


Figura 7 Elemento bajo la carga uniformemente distribuida

$$w_a = \frac{\lambda q'}{2K'} \left(\int_0^a A_\lambda(x) dx + \int_0^b A_\lambda(x) dx \right)$$

$$\int A_\lambda(x) = -\frac{1}{\lambda} D_\lambda(x)$$

$$w_a = \frac{\lambda q'}{2K'} \left(-\frac{1}{\lambda} D_\lambda(a) + \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} D_\lambda(b) + \frac{1}{\lambda} \right)$$

$$w_a = \frac{q'}{2K'} (2 - D_\lambda(a) - D_\lambda(b))$$

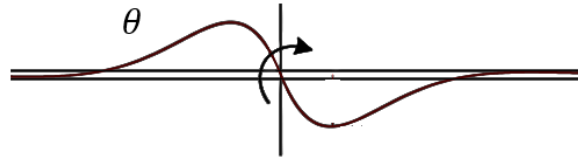


Figura 8 Angulo de la deformada

$$\theta_A = -\frac{P\lambda^2}{K'} * B_\lambda(x)$$

$$\theta_A = -\frac{\lambda^2 q'}{K'} \left(\int_0^a B_\lambda(x) dx - \int_0^b B_\lambda(x) dx \right)$$

$$\theta_A = -\frac{\lambda^2 q'}{K'} \left(-\frac{A_\lambda(a)}{2\lambda} + \frac{1}{2\lambda} + \frac{A_\lambda(b)}{2\lambda} - \frac{1}{2\lambda} \right)$$

$$\theta_A = \frac{\lambda q'}{2K'} (A_\lambda(a) + A_\lambda(b))$$

Momento:

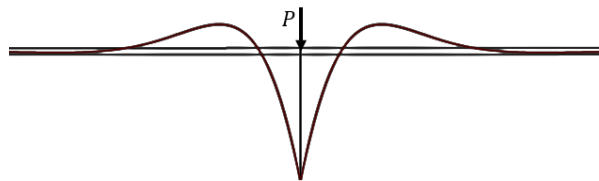


Figura 9 Momento producto de la carga

$$M_A = \frac{P}{4\lambda} \left(\int_0^a C_\lambda(x) dx + \int_0^b C_\lambda(x) dx \right)$$

$$M_A = \frac{q'}{4\lambda^2} (B_\lambda(a) + B_\lambda(b))$$

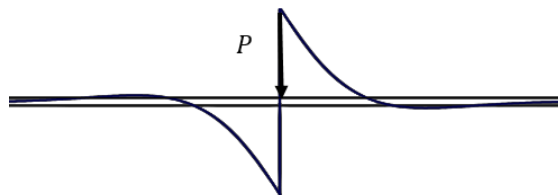


Figura 10 Corte producto de la carga

$$V_A = -\frac{q'}{2} \left(\int_0^a D_\lambda(x) dx + \int_0^b D_\lambda(x) dx \right)$$

$$V_A = -\frac{q'}{4\lambda} (C_\lambda(a) + C_\lambda(b))$$

1.3.2. Punto A al lado izquierdo de la carga distribuida

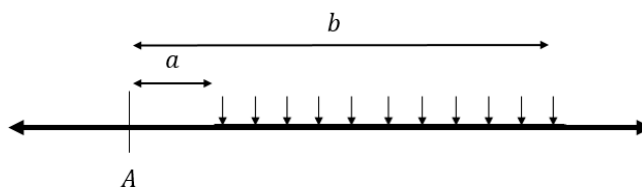


Figura 11 Elemento al lado izquierdo de la carga uniformemente distribuida

$$w_A = \frac{\lambda q'}{2K'} \left(\int_a^b A_\lambda(x) dx \right) = \frac{\lambda q'}{2K'} (D_\lambda(a) + D_\lambda(b))$$

$$\theta_A = \frac{\lambda q'}{2K'} (A_\lambda(a) + A_\lambda(b))$$

$$M_A = -\frac{q'}{4\lambda^2} (B_\lambda(a) - B_\lambda(b))$$

$$V_A = \frac{q'}{4\lambda} (C_\lambda(a) + C_\lambda(b))$$



1.4. Viga con un sistema de cargas

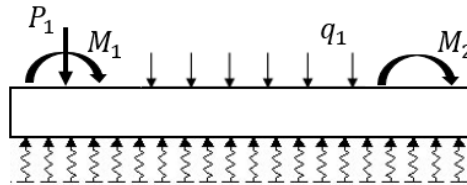


Figura 12 viga sobre en medio elástico sometida a un sistema de cargas

$$w(x) = \sum_{i=1}^N w_i(x)$$

En este caso el valor resultante para w, θ, V, M , es la suma de cada contribución realizada por cada carga, superposición.



2. Viga semi-infinita

Existen casos en que la viga en estudio no puede considerarse como una viga infinita debido a las condiciones de borde.

2.1. viga con extremo libre

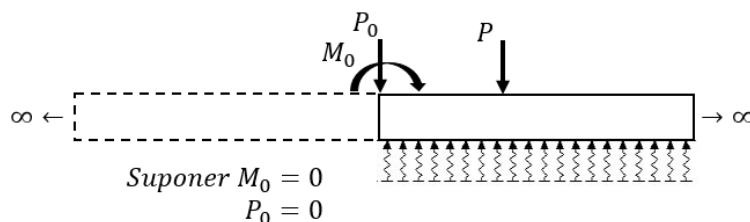


Figura 13 Viga semi-infinita con extremo libre

Para resolver este problema, imponga una viga infinita a la que debe aplicar una carga P_0 y un momento M_0 para satisfacer la condición de borde real existente.

C.B. $M = 0$; $V = 0$

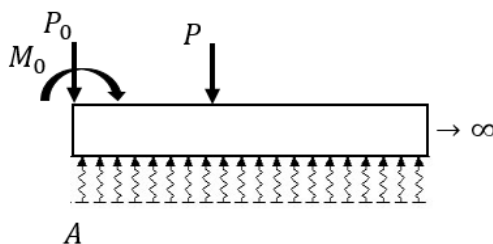


Figura 14 Viga semi-infinita con las fuerzas correspondientes para satisfacer la condición de borde



$$\sum M = 0 ; en A$$

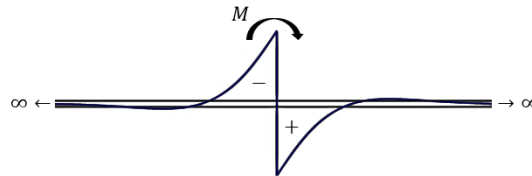


Figura 15 Momento en viga semi-infinita

$$M_A + \frac{M_0}{2} + \frac{P_0}{2} = 0$$

$$\sum V = 0 ; en A$$

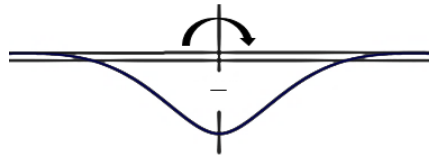


Figura 16 Corte en viga semi-infinita

$$V_A - \frac{M_0 \lambda}{2} - \frac{P_0}{2} = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$P_0 = 4(\lambda M_A + V_A)$$

$$M_0 = -\frac{2}{\lambda}(2\lambda M_A + V_A)$$

Luego aplicamos P_0 y M_0 a una viga infinita para recrear el caso real.



2.2. Viga con extremo rotulado

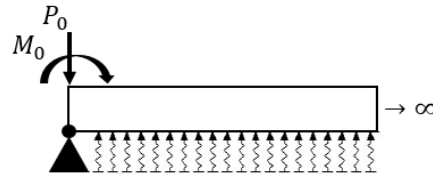


Figura 17 Viga con extremo rotulado

C.B. $M = 0 ; V = 0$

En forma similar a lo anterior

$$\begin{aligned} P_0 &= -\frac{2K'}{\lambda} w_A \\ M_0 &= \frac{K'}{\lambda^2} w_A - 2M_A \end{aligned}$$

w_A : Deformación de la viga infinita producto del sistema de carga real

M_A : Momento en la viga producto del sistema de carga real

2.3. Viga con extremo empotrado

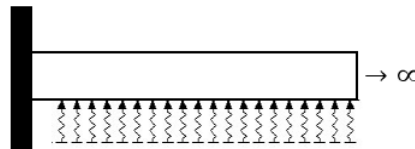


Figura 18 Viga con extremo empotrado

C.B. $w = 0 ; \theta = 0$

$$\begin{aligned} w &= \frac{P_0 \lambda}{2K'} \\ w_A + \frac{P_0 \lambda}{2K'} &= 0 \end{aligned}$$



$$P_0 = -\frac{2K'}{\lambda} w_A$$

$$M_0 = -\frac{2K'}{\lambda^3} \theta_A$$

2.4. Casos particulares

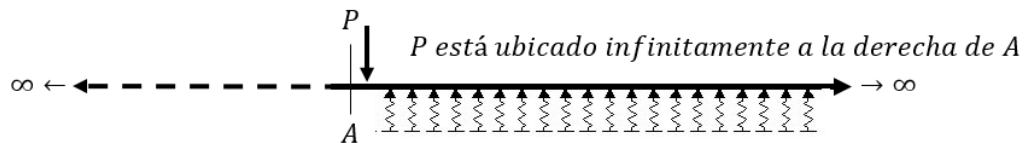


Figura 19 Carga ubicada a la derecha del punto A

$$V_A = +\frac{P}{2}$$

$$M_A = \frac{P}{4\lambda}$$

De ambos se tiene que,

$$M_0 = -\frac{2}{\lambda} (2\lambda M_A + V_A)$$

$$M_0 = -\frac{2}{\lambda} \left(2\lambda \frac{P}{4\lambda} + \frac{P}{2} \right) = -\frac{2P}{\lambda}$$

$$P_0 = 4(\lambda M_A + V_A) = 4 \left(\lambda \frac{P}{4\lambda} + \frac{P}{2} \right) = 3P$$

Entonces:

$$M_0 = -\frac{2P}{\lambda}$$

$$P_0 = 3P$$

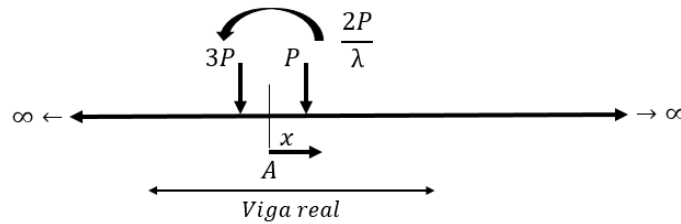


Figura 20 Sistema de cargas sobre una viga

Luego podemos calcular que sucede en la viga semi-infinita ("real"), producto de la carga P.

$$w(x) = \frac{4P\lambda}{2K'} A_\lambda(x) + \left(-\frac{2P}{\lambda} * \frac{\lambda^2}{K'} B_\lambda(x) \right)$$

$$w(x) = \frac{2P\lambda}{K'} (A_\lambda(x) - B_\lambda(x))$$

$$w(x) = \frac{2P\lambda}{K'} D_\lambda(x)$$

$$\theta(x) = -\frac{4P\lambda^2 B_\lambda(x)}{K'} + \left(-\frac{2P}{\lambda} * \frac{\lambda^3}{K'} C_\lambda(x) \right)$$

$$\theta(x) = -\frac{2P\lambda^2}{K'} (2B_\lambda(x) + C_\lambda(x))$$

$$\theta(x) = -\frac{2P\lambda^2}{K'} A_\lambda(x)$$

$$M(x) = \frac{4P}{4K'} C_\lambda(x) - \frac{2P}{2\lambda} D_\lambda(x) = \frac{P}{\lambda} (C_\lambda(x) - D_\lambda(x))$$

$$M(x) = -\frac{P}{\lambda} B_\lambda(x)$$



$$V(x) = -\frac{4P}{2K'} D_\lambda(x) - \frac{2P\lambda}{2\lambda} A_\lambda(x) = -P(2D_\lambda(x) - A_\lambda(x))$$

$$V(x) = -PC_\lambda(x)$$

Siguiendo un desarrollo similar a los anteriores se tiene:

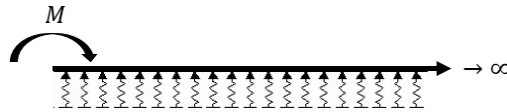


Figura 21 Viga semi-infinita con momento en el extremo izquierdo

$$w(x) = -\frac{2M\lambda^2}{K'} C_\lambda(x)$$

$$\theta(x) = -\frac{4M\lambda^3}{K'} D_\lambda(x)$$

$$M(x) = MA_\lambda(x)$$

$$V(x) = -2M\lambda B_\lambda(x)$$

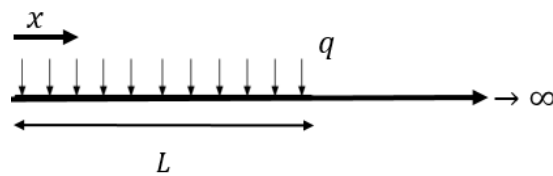


Figura 22 Viga semi-infinita con carga distribuida

Para $x > L$

$$w(x) = \frac{q}{2K'} \left((1 + B_\lambda(x) - C_\lambda(x)) A_\lambda(x) - (1 + 2B_\lambda(L) - C_\lambda(L)) B_\lambda(L) - (D_\lambda(x) - D_\lambda(x - L)) \right)$$