CI3201: ANALISIS DE ESTRUCTURAS ISOSTATICAS

Sección No.1

Profesor: Francisco Hernández

e-mail: fhernandezp@ing.uchile.cl

Oficina: 428 (4to Piso, Edificio de Civil)

Capítulo 2:
Sistemas de fuerzas

¿Qué es una fuerza?

- La fuerza es una magnitud física de carácter vectorial capaz de deformar los cuerpos (efecto estático), modificar su velocidad o vencer su inercia y ponerlos en movimiento si estaban inmóviles (efecto dinámico). En este sentido la fuerza puede definirse como toda acción o influencia capaz de modificar el estado de movimiento o de reposo de un cuerpo (imprimiéndole una aceleración que modifica el módulo o la dirección de su velocidad).

- Una fuerza está definida por:
  - Magnitud
  - Dirección (línea de acción)
  - Sentido
  - Punto de aplicación

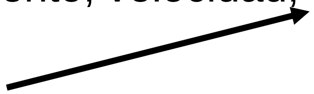
$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(m \cdot v)}{dt} \approx m \cdot a$$

Se representa por un vector en el espacio.

• REPASO DE ALGEBRA VECTORIAL

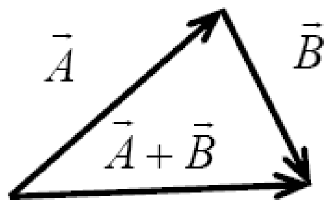
<u>Escalar</u>: - Magnitud
- Ejemplos: longitud, masa, temperatura, tiempo, etc.
- Notación: K o k

<u>Vector</u>: - Magnitud, dirección y sentido
- Ejemplos: desplazamiento, velocidad, **fuerza, empuje,** etc.
- Notación:

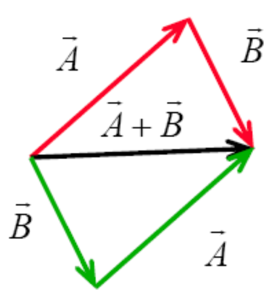


Operaciones entre vectores.

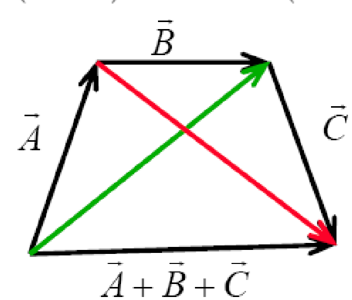
• <u>Suma de vectores.</u>



Propiedades: - Conmutativa $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$

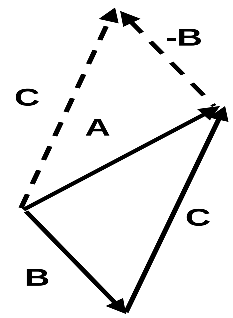


- Asociativa $\left(\vec{A}+\vec{B}\right)+\vec{C}=\vec{A}+\left(\vec{B}+\vec{C}\right)$

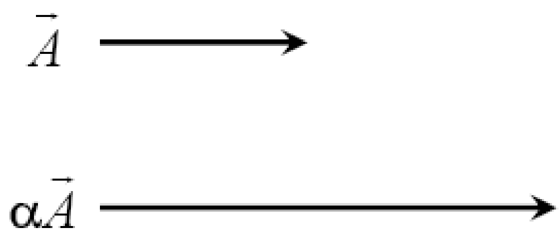


Operaciones entre vectores. (continuación)

- <u>Resta de vectores.</u> $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$



- <u>Producto por un escalar.</u> Sólo modifica la magnitud del vector.



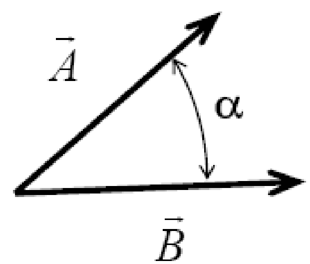
Propiedades:

$$\alpha \cdot \vec{A} = \vec{A} \cdot \alpha$$
$$\alpha \cdot \left(\beta \cdot \vec{A}\right) = \left(\alpha \cdot \beta\right) \cdot \vec{A}$$
$$\left(\alpha + \beta\right) \cdot \vec{A} = \alpha \cdot \vec{A} + \beta \cdot \vec{A}$$
$$\alpha \cdot \left(\vec{A} + \vec{B}\right) = \alpha \cdot \vec{A} + \alpha \cdot \vec{B}$$

- <u>Producto Escalar.</u> Dados dos vectores A y B su producto escalar se define como:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| \cos\alpha$$

Es un escalar.



- <u>Producto Escalar</u>.(continuación)

Propiedades:

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$$
$$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}+\vec{C}\right)=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$$
$$\alpha\cdot\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)=\left(\alpha\cdot\vec{A}\right)\cdot\vec{B}=\vec{A}\cdot\left(\alpha\cdot\vec{B}\right)$$
$$\vec{A}\cdot\vec{A}=\left|\vec{A}\right|\cdot\left|\vec{A}\right|\cdot\cos(0°)=\left|\vec{A}\right|^2\Rightarrow\left|\vec{A}\right|=\sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}\geq 0 \quad \textit{Módulo de un vector}$$
$$\left|\vec{A}\right|=1\Leftrightarrow\vec{A}\cdot\vec{A}=1 \qquad \textit{Vector unitario}$$
$$Si\ \left.\begin{array}{l}\left|\vec{A}\right|\neq 0\\ \vec{a}=\dfrac{\vec{A}}{\sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}}\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\left|\vec{a}\right|=1\\ \vec{a}\,//\,\vec{A}\end{array}\right. \qquad \textit{Normalización de un vector}$$
$$Si\ \left.\begin{array}{l}\vec{A}\cdot\vec{B}=0\\ \left|\vec{A}\right|\neq 0\\ \left|\vec{B}\right|\neq 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\vec{A}\perp\vec{B}\right.$$

- <u>Definición:</u> Base Ortonormal

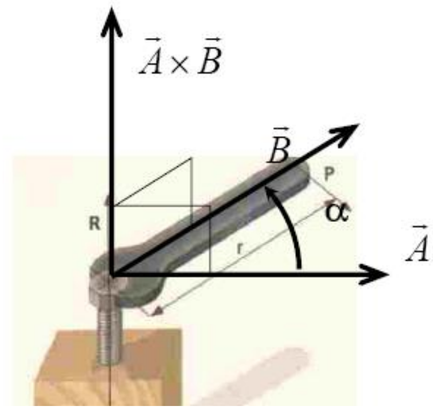
Una base ortonormal es aquella que está definida por vectores unitarios ortogonales que permiten formar cualquier vector a través de una combinación lineal entre los vectores de la base. A través de una base se descompone un vector, luego, las operaciones se pueden realizar por **componentes separadas**.

$$\hat{x},\hat{y},\hat{z}\Rightarrow\left\{\begin{array}{lll}\hat{x}\cdot\hat{x}=1 & \hat{x}\cdot\hat{y}=0 & \hat{x}\cdot\hat{z}=0\\ & \hat{y}\cdot\hat{y}=1 & \hat{y}\cdot\hat{z}=0\\ & & \hat{z}\cdot\hat{z}=1\end{array}\right\}\Rightarrow\vec{A}=A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z}$$

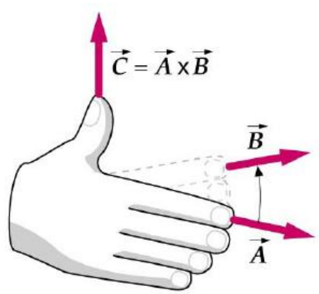
$$\vec{A}\cdot\hat{x}=\left(A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z}\right)\cdot\hat{x}=A_x$$
$$\vec{A}\cdot\hat{y}=A_y$$
$$\vec{A}\cdot\hat{z}=A_z$$
$$\vec{A}=\alpha\ \hat{x}+\beta\ \hat{y}+\gamma\ \hat{z}$$

- <u>Producto Vectorial.</u> Dados dos vectores A y B su producto vectorial se define:

$$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| \mathbf{sen}\,\alpha$$



Regla de la mano derecha



Conocidas las componentes de los vectores

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Propiedades

$$\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$$

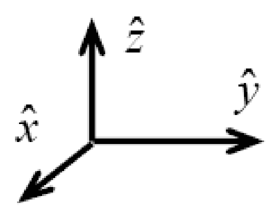
$$\vec{A}\times\left(\vec{B}+\vec{C}\right) = \vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$$

$$\alpha\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) = \left(\alpha\cdot\vec{A}\right)\times\vec{B} = \vec{A}\times\left(\alpha\cdot\vec{B}\right)$$

$$Si \quad \vec{A}//\vec{B} \Rightarrow \vec{A}\times\vec{B} = 0$$

$$\vec{A}\times\vec{A} = 0$$

$$\hat{x}\times\hat{y} = \hat{z} \qquad \hat{z}\times\hat{x} = \hat{y} \qquad \hat{y}\times\hat{z} = \hat{x}$$



- <u>Otras Propiedades: *productos triples*</u>

$$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\vec{B}\cdot\left(\vec{C}\times\vec{A}\right)=\vec{C}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B}-\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}\\ \left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\times\vec{C}=\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B}-\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)\vec{A}\end{array}\right\}\Rightarrow\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)\neq\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\times\vec{C}$$

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\left(\vec{C}\times\vec{D}\right)=\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\left(\vec{B}\cdot\vec{D}\right)-\left(\vec{A}\cdot\vec{D}\right)\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)$$

- <u>Diferenciación.</u> La derivada de un vector se define como:

$$\frac{d\vec{A}(\alpha)}{d\alpha}=\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\vec{A}(\alpha+\Delta\alpha)-\vec{A}(\alpha)}{\Delta\alpha}=\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\Delta\vec{A}}{\Delta\alpha}$$

Propiedades

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\vec{A}+\vec{B}\right)=\frac{d\vec{A}}{d\alpha}+\frac{d\vec{B}}{d\alpha}\qquad\qquad \frac{d}{d\alpha}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)=\frac{d\vec{A}}{d\alpha}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{d\alpha}$$

$$\frac{d}{d\alpha}\left(m\vec{A}\right)=\frac{dm}{d\alpha}\cdot\vec{A}+m\cdot\frac{d\vec{A}}{d\alpha}\qquad \frac{d}{d\alpha}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\frac{d\vec{A}}{d\alpha}\times\vec{B}+\vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{d\alpha}$$

$$\frac{d\vec{A}}{d\alpha}=\frac{dA_x}{d\alpha}\hat{x}+\frac{dA_y}{d\alpha}\hat{y}+\frac{dA_z}{d\alpha}\hat{z}$$

- <u>Diferencial de un vector.</u>

$$d\vec{A}=\frac{d\vec{A}}{d\alpha}\cdot d\alpha=\frac{dA_x}{d\alpha}\cdot d\alpha\;\hat{x}+\frac{dA_y}{d\alpha}\cdot d\alpha\;\hat{y}+\frac{dA_z}{d\alpha}\cdot d\alpha\;\hat{z}=dA_x\;\hat{x}+dA_y\;\hat{y}+dA_z\;\hat{z}$$

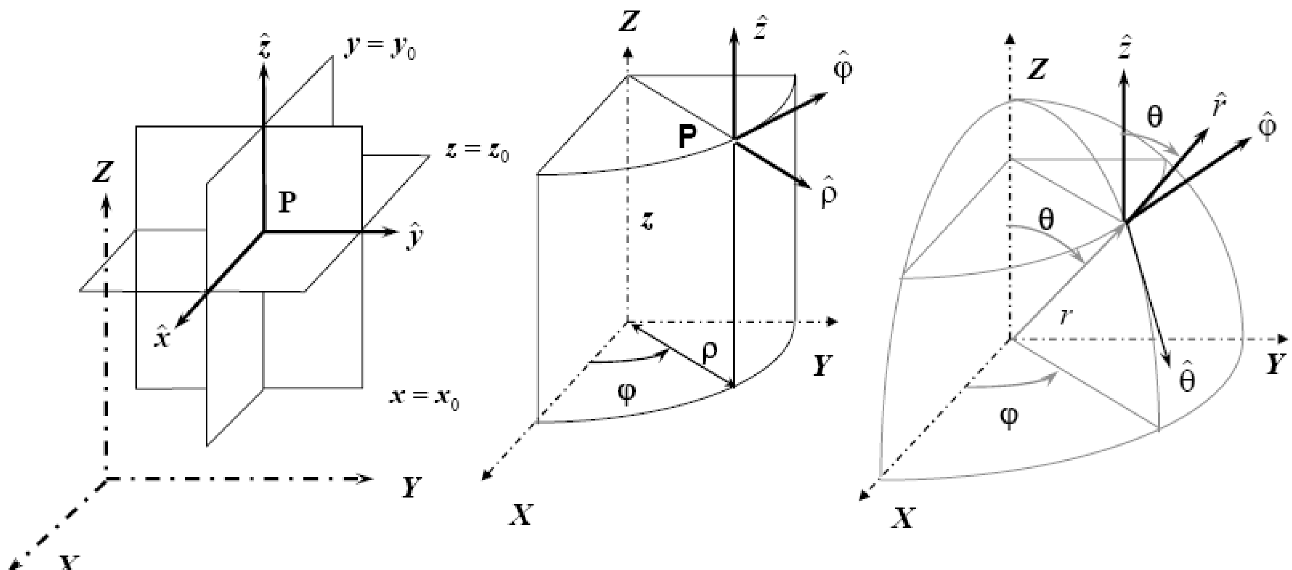
- <u>Integración de vectores.</u>

$$\int_a^b \vec{A}\,d\alpha = \hat{x}\int_a^b A_x\,d\alpha + \hat{y}\int_a^b A_y\,d\alpha + \hat{z}\int_a^b A_z\,d\alpha$$

Sistemas de Coordenadas.

A través de ellos se describen los puntos en el espacio.

El uso adecuado de uno u otro sistema de coordenada depende del tipo de problema al que nos enfrentamos.



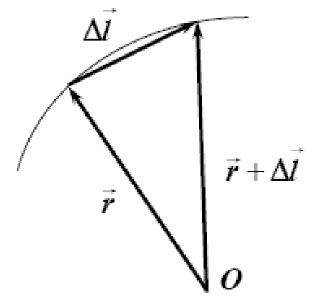
Cartesiano (x, y, z) **Cilíndrico** (ρ, φ, z) **Esférico** (r, θ, φ)

- <u>Sistema Cartesiano.</u>

Vector posición: vector que une el origen de coordenadas con el punto.

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

Desplazamiento a lo largo de una curva:



$$\Delta\vec{l} = \Delta x\hat{x} + \Delta y\hat{y} + \Delta z\hat{z}$$

Desplazamiento infinitesimal:

$$d\vec{l} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$$

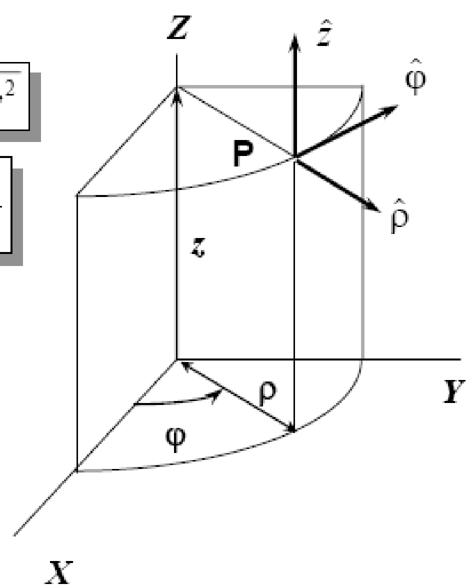
$$dl = \left|d\vec{l}\right| = \sqrt{d\vec{l} \cdot d\vec{l}} = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

- <u>Sistema Cilíndrico.</u>

$$\boxed{\rho = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\boxed{\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$$

$$\boxed{z = z}$$



Vector posición

$$\vec{r} = \underbrace{\rho\cos\varphi}_{x}\hat{x} + \underbrace{\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi}_{y}\hat{y} + z\hat{z}$$

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$$

Desplazamiento infinitesimal

$$d\vec{l} = d\rho\hat{\rho} + \rho d\varphi\hat{\varphi} + dz\hat{z}$$

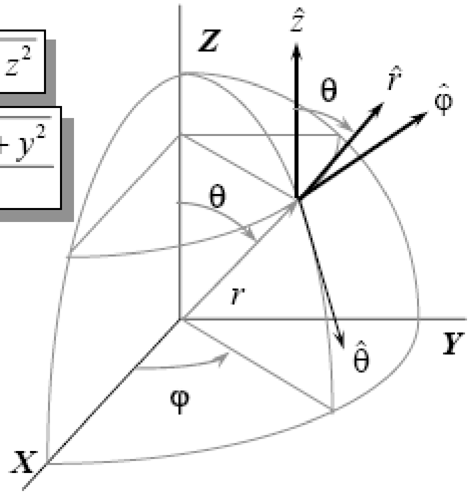
$$dl = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2}$$

Sistema Esférico.

$$\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\boxed{\theta = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}}$$

$$\boxed{\varphi = \mathrm{arctg}\frac{y}{x}}$$



Vector posición $\vec{r} = \underbrace{r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi}_{x}\hat{x} + \underbrace{r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi}_{y}\hat{y} + \underbrace{r\cos\theta}_{z}\hat{z}$

$$\boxed{\vec{r} = r\hat{r}}$$

Desplazamiento infinitesimal

$$d\vec{l} = dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta} + r\,\mathrm{sen}\,\theta d\varphi\hat{\varphi}$$

$$dl = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\,\mathrm{sen}\,\theta^2 d\varphi^2}$$

<u>Propuesto:</u> Definir las matrices de cambio de coordenadas y sus inversas respectivas:

- Cartesiano a cilíndrico
- Cartesiano a esférico
- Cilíndrico a esférico

¿ Qué propiedad cumplen las inversas de las matrices de rotación de coordenadas?

Ejemplo: Cambio de coordenadas de un sistema cartesiano a un sistema cilíndrico.

Por definición de un vector unitario podemos escribir:

$$\hat{\rho} = \frac{\dfrac{d\vec{r}}{d\rho}}{\left\|\dfrac{d\vec{r}}{d\rho}\right\|} = \frac{\cos(\varphi)\ \hat{x} + sen(\varphi)\ \hat{y}}{\left|\cos(\varphi)\ \hat{x} + sen(\varphi)\ \hat{y}\right|} = \cos(\varphi)\ \hat{x} + sen(\varphi)\ \hat{y}$$

$$\hat{\varphi} = \frac{\dfrac{d\vec{r}}{d\varphi}}{\left\|\dfrac{d\vec{r}}{d\varphi}\right\|} = \frac{\rho\cdot\left[-sen(\varphi)\ \hat{x} + \cos(\varphi)\ \hat{y}\right]}{\left|\rho\cdot\left[-sen(\varphi)\ \hat{x} + \cos(\varphi)\ \hat{y}\right]\right|} = -sen(\varphi)\ \hat{x} + \cos(\varphi)\ \hat{y}$$

$$\hat{z} = \frac{\dfrac{d\vec{r}}{dz}}{\left\|\dfrac{d\vec{r}}{dz}\right\|} = \frac{\hat{z}}{\left|\hat{z}\right|} = \hat{z}$$

A partir de estas relaciones se puede establecer el cambio de coordenadas desde un sistema cartesiano a un sistema cilíndrico mediante la matriz:

$$\begin{bmatrix}\hat{\rho}\\ \hat{\varphi}\\ \hat{z}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(\varphi) & sen(\varphi) & 0\\ -sen(\varphi) & \cos(\varphi) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\\ \hat{z}\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\\ \hat{z}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(\varphi) & -sen(\varphi) & 0\\ sen(\varphi) & \cos(\varphi) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\hat{\rho}\\ \hat{\varphi}\\ \hat{z}\end{bmatrix}$$

• FUERZAS EN LA NATURALEZA

- Las obras realizadas por el hombre están sometidas permanentemente a fuerzas de la naturaleza.

- El ejemplo más claro es la fuerza de gravedad, ya que todos los cuerpos que poseen masa están sometidos a la fuerza de su **peso propio**.

- En estructuras convencionales siempre estarán presentes las **cargas muertas adicionales** (estucos, terminaciones, tabiques, etc.) y las **sobrecargas de uso** (mobiliario, ocupantes, etc.).

- En estructuras industriales existen otros tipos de **cargas que dependen del uso** que tenga la obra civil. Por ejemplo, carga de puente grúa, empujes de agua, presión de gases, temperatura de gases o líquidos.

- Muchas estructuras quedan en contacto lateral con depósitos de suelo o fluidos, por lo cual deben soportar el **empuje** que éstos les produce.

- La naturaleza debido a su acción **dinámica** produce numerosas fuerzas que solicitan a las estructuras, como son el viento, la nieve, la lluvia y sismos.

- Finalmente, no se debe olvidar que durante cualquier construcción de una obra civil pueden existir cargas producidas por el mismo **proceso constructivo** que no deben olvidarse en el análisis de las estructuras.

CARGAS E HIPÓTESIS DE CARGA SOBRE LAS ESTRUCTURAS:

- CARGAS
  - Directas
    - Permanentes (D ="Dead load")
      - Peso propio (estructura)
      - Terminaciones (estucos, ornamentos, tabiques)
    - Sobrecargas
      - De uso (L ="Live load")
        - Fijas (Bodega, Biblioteca)
        - Variables (personas, muebles)
      - De construcción y montaje
      - Climáticas
        - Nieve (S ="Snow")
        - Viento (W ="Wind")
        - Lluvia o hielo (R ="Rain")
      - Terreno
        - Peso del terreno (H)
        - Empujes del terreno (H)
      - Liquidos
        - Peso de líquidos (F)
        - Empujes de líquidos (F)
  - Indirectas
    - Sísmicas (E ="earthquake")
    - Frenaje y empuje lateral de puentes grúa
    - Por asentamiento (T)
    - Térmicas (T)
    - Hinchamiento y Contracción (madera)
    - Reológicas (Hormigón)
      - Retracción de fraguado (T)
      - Flujo Plástico (T)

• Unidades

El ***Sistema Internacional*** *(SI)* de unidades usa como unidades de las magnitudes básicas (longitud, masa y tiempo) al **metro** [m], al **kilogramo** [kg] y al **segundo** [s] respectivamente. Para la fuerza la unidad se deriva de la anteriores, y corresponde al **Newton** [N], la cual equivale a 1 [kg*m/s^2].

Por otra parte sabemos que debido a la presencia de la fuerza de gravedad toda masa m tiene asociada una fuerza peso W=m*g [N] con sentido hacia el centro de la tierra.

<u>Prefijo del SI</u>

Prefijo	Simbolo	Factor
exa	E	10^{18}
peta	P	10^{15}
tera	T	10^{12}
giga	G	10^{9}
mega	M	10^{6}
kilo	k	10^{3}
hecto	h	10^{2}
deca	da	10^{1}

Prefijo	Simbolo	Factor
deci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
mili	m	10^{-3}
micro	µ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}
atto	a	10^{-18}

Por otra parte, el ***Sistema Inglés*** *(USCS)* de unidades usa como unidades de las magnitudes básicas (longitud, masa y tiempo) al **pie** [ft], a la **libra** [lb] y al **segundo** [s] respectivamente. Para la fuerza la unidad se deriva de la anteriores, y corresponde a una masa de una libra con una aceleración de g=32.2 [ft/s^2].

La equivalencia entre las unidades de los sistemas SI y USCS de las magnitudes básicas son:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \text{ ft} = 0.3048 \text{ m} \\ 1 \text{ lb} = 0.4536 \text{ kg} \\ 1 \text{ s} = 1 \text{ s} \end{array}\right\} \quad 1\ [\text{N}] = 1\ \text{kg*m/s}^2 = (2.205\ \text{lb}) * (3.281\ \text{ft}) / (32.2\ \text{s}^2) = 0.225\ [\text{lbf}]$$

Luego, 1 [N] = 0.225 [lbf]   o bien   1 [lbf] = 4.448 [N]

Otras unidades de fuerza usadas comúnmente son:

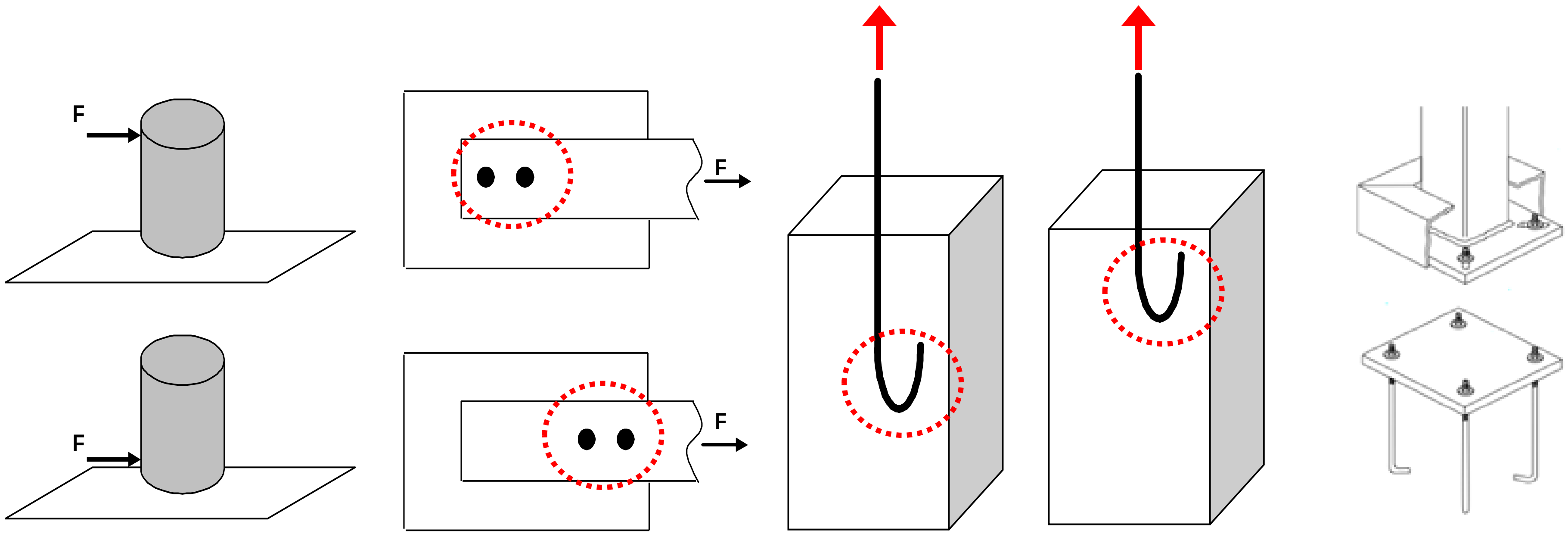
- kip = 1000*lbf = 4.44x10^3 [N]
- dina = 10^{-5} [N]
- kgf = 10 [N]
- tonf = 1000*kgf

1” (1 pulgada) = 2.54 cm

1 ft = 12 pulg

• Dirección, punto de aplicación.

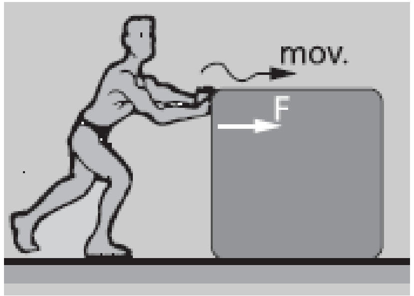
Definimos fuerza como la acción que un cuerpo ejerce sobre otro o bien como la interacción que existe entre 2 o más cuerpos, la cual modifica el estado de reposo o movimiento de un cuerpo, además de generar deformaciones en él. Es claro, que es una cantidad vectorial, ya que además de su **<u>magnitud, depende de la dirección y del sentido</u>**. Además, para poder caracterizar completamente una fuerza se requiere su **<u>punto de aplicación</u>**, ya que la respuesta de la partícula o del sólido depende de la posición en que dicha fuerza le es aplicada. Por ejemplo, en la figuras siguientes la fuerza F que actúa sobre los cuerpos posee la misma magnitud, dirección y sentido en ambos casos, pero distinto punto de aplicación, por lo cual su efecto será diferente.

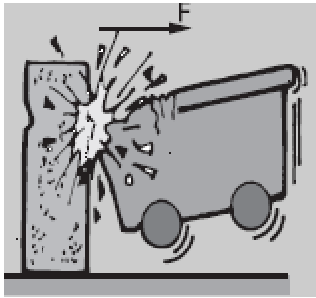


• Tipos de Fuerzas.

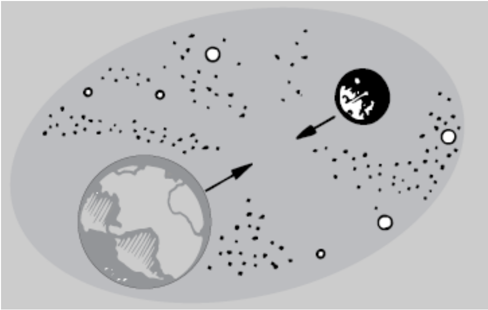
La interacción entre dos o más cuerpos puede ser de dos formas:

- **Fuerza de contacto**: cuando existe contacto físico entre los cuerpos.





- **Fuerzas de campo o másicas**: fuerzas donde no interviene el contacto físico, pero los cuerpos actúan a través del espacio.

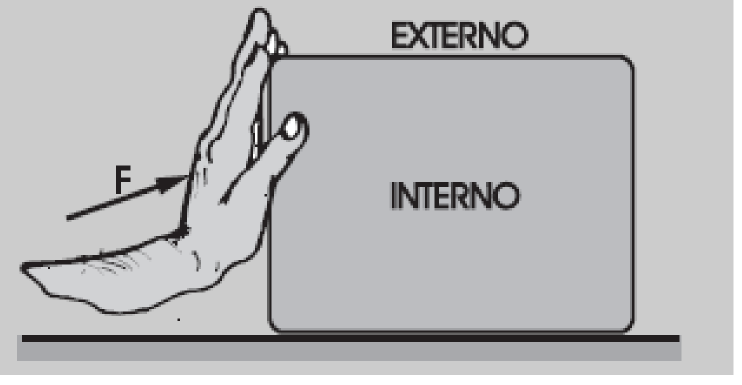


• **Clasificación de Fuerzas.**

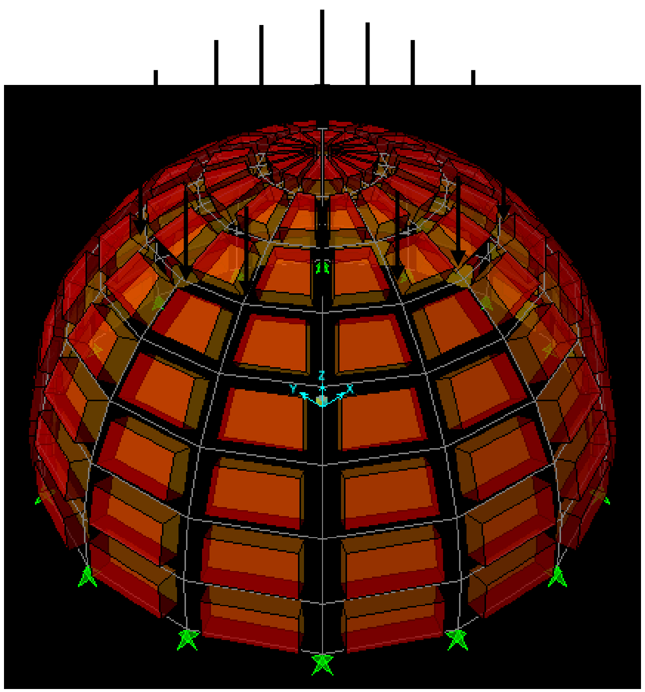
Cuando una fuerza actúa sobre un cuerpo produce efectos que pueden clasificarse externos e internos.

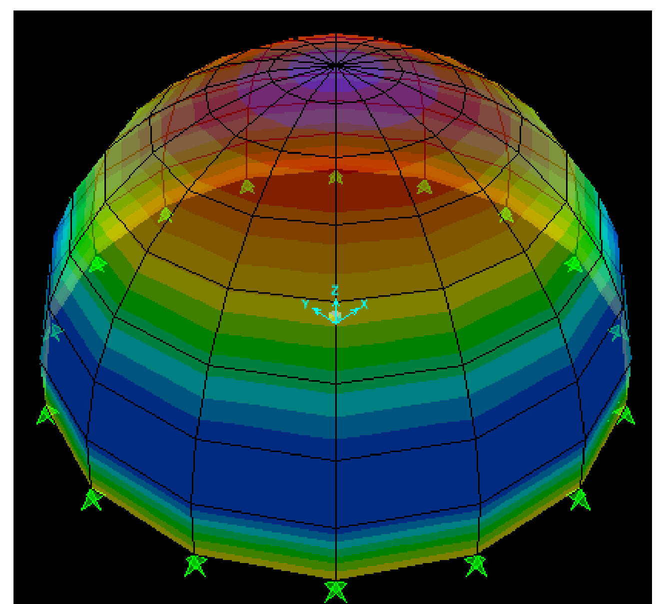
1- Fuerzas Externas: son aquellas que se presentan en la superficie de los cuerpos que interactúan. Ellas pueden ser activas, cuando el cuerpo mismo la aplica, o reactivas, cuando el cuerpo responde a una solicitación externa.

2- Fuerzas Internas: son aquellas que mantienen juntas a las partículas que forman a un cuerpo. Están directamente relacionadas con las deformaciones y las tensiones que experimenta el cuerpo en su interior, las cuales a su vez están relacionados a través de las relaciones constitutivas y compatibilidad de deformaciones. Este tipo de fuerzas será visto en mayor detalle en los próximos capítulos del curso.




Normandy Bridge

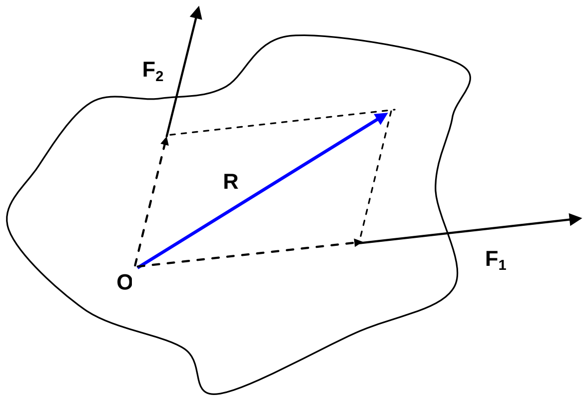


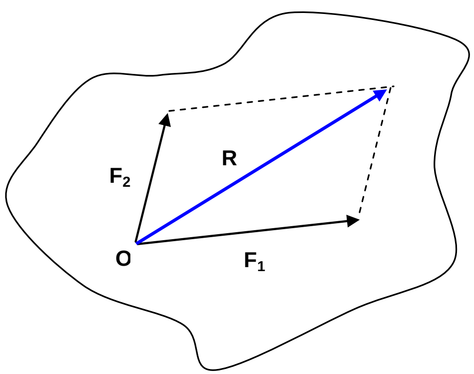


• La fuerza como vector. Descomposición de fuerzas. Suma de Fuerzas y Resultante.

Como sabemos la fuerza es una cantidad vectorial, por lo tanto obedece a las leyes de los vectores, en particular la **suma y la descomposición** de fuerzas en los ejes de un sistema coordenado dado.

De este modo, varias fuerzas cuyas prolongaciones posean un mismo punto de aplicación (**concurrentes**), pueden representarse por medio de una sola fuerza resultante, la cual produce el mismo efecto. Esto se realiza mediante la ley del paralelogramo para sumar vectores.





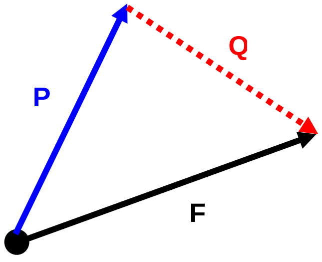
La suma de dos fuerzas se representa matemáticamente por: $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

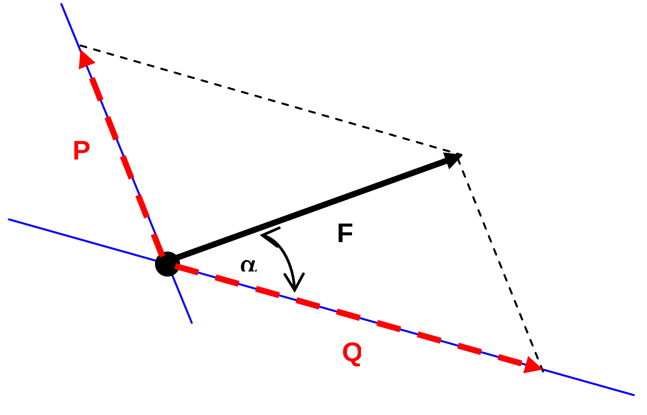
Como dijimos dos o más fuerzas que actúan sobre un cuerpo pueden sustituirse por una fuerza equivalente, entonces de manera equivalente una fuerza dada puede reemplazarse por dos o más fuerzas que juntas produzcan el mismo efecto. A esta fuerzas se les llama <u>componentes</u>, mientras se dice que la fuerza original se ha <u>descompuesto</u>.

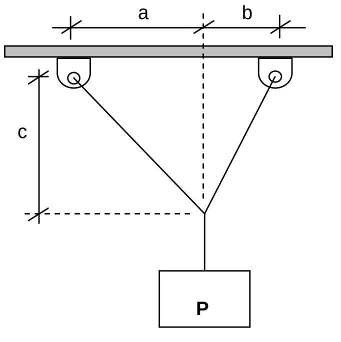
Resulta evidente que para una fuerza dada existen **infinitas descomposiciones**, sin embargo, el caso más importante de analizar es cuando la fuerza se descompone en 2. Para este último caso, existen dos sub-casos de interés práctico:

- Una de las componentes es conocida (P): la segunda componente (Q) se obtiene aplicando la regla del triángulo; su magnitud, dirección y sentido se obtienen gráficamente o por trigonometría. (ejemplo: equilibrio en nodo de un enrejado)

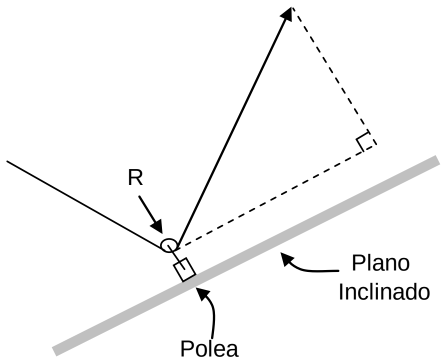
- Cuando se conoce la línea de acción de cada componente: la magnitud y el sentido de las componentes se obtiene aplicando la ley del paralelogramo. En este caso ambas componentes (P y Q) se obtienen gráficamente o por trigonometría. (ejemplo: sistema de cables)





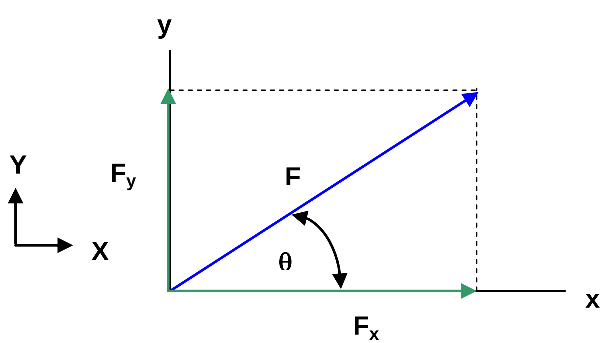


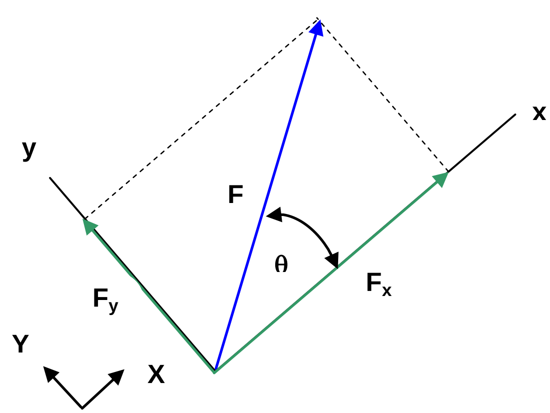
<u>Nota:</u> es muy importante no confundir entre las componentes de una fuerza y sus proyecciones ortogonales. **Las componentes deben elegirse de manera tal de simplificar** la matemática del problema, y el caso de componentes ortogonales es sólo un caso particular.



<u>Caso Particular:</u> Componentes rectangulares de una fuerza en el plano.

Debido a la configuración de muchos problemas es conveniente descomponer una fuerza en sus dos componentes rectangulares, es decir, a componentes que sean paralelas a los ejes X e Y de un sistema cartesiano de coordenadas. Esto nos permite llevar todas las fuerzas a un sistema cartesiano común.





$$\vec{F} = F_X \cdot \hat{x} + F_Y \cdot \hat{y} = F_X \cdot \hat{i} + F_Y \cdot \hat{j}$$

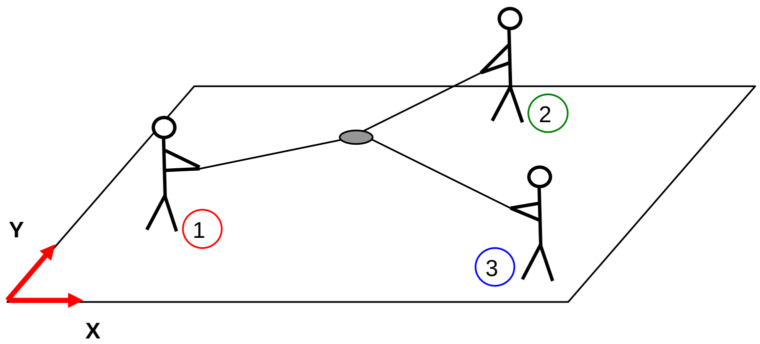
$$F_X = F \cdot \cos(\theta)$$

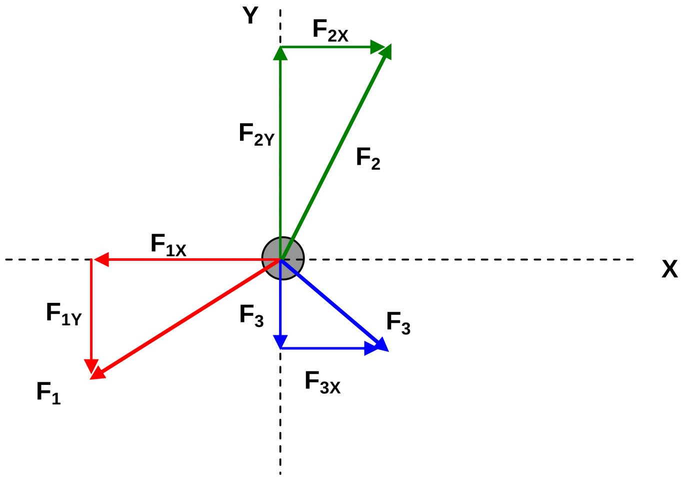
$$F_Y = F \cdot sen(\theta)$$

$$\tan(\theta) = \frac{F_Y}{F_X}$$

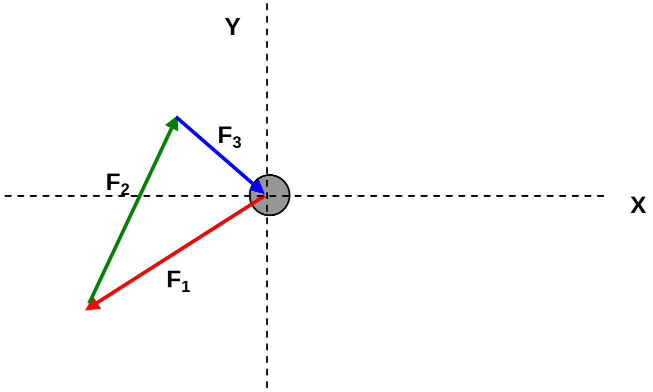
$$\left|\vec{F}\right| = \sqrt{{F_X}^2 + {F_Y}^2}$$

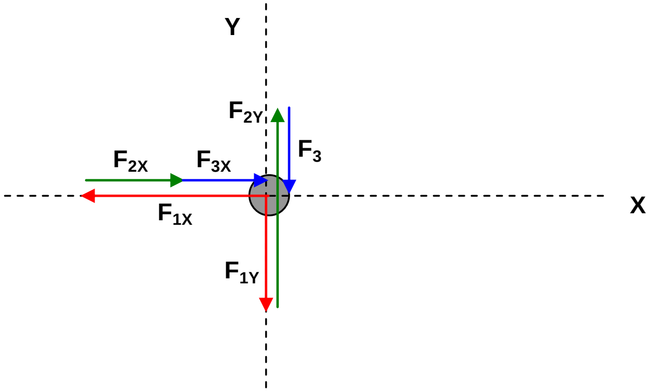
Ejemplo:





Fuerza Resultante

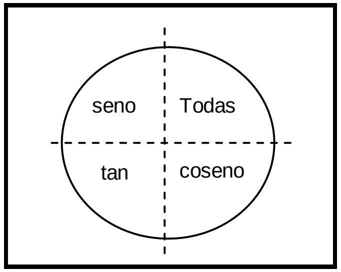




$$R_X = F_{1X} + F_{2X} + F_{3X} + \ldots\ldots = \sum_i F_{iX}$$

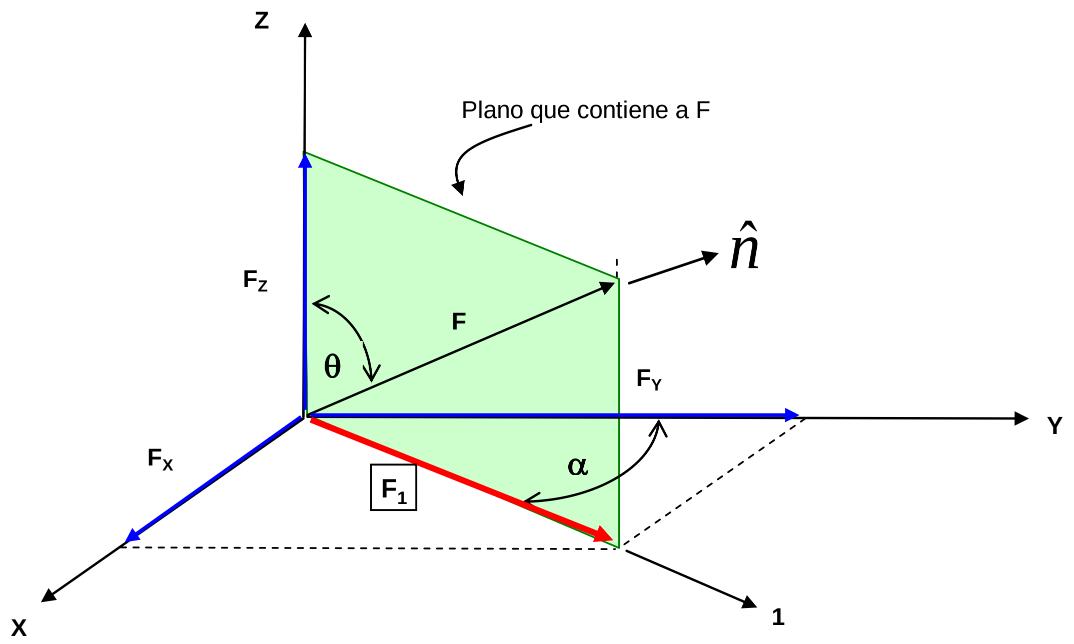
$$R_Y = F_{1Y} + F_{2Y} + F_{3Y} + \ldots\ldots = \sum_i F_{iY}$$

Recuerdo: Funciones trigonométricas y cuadrantes en que su valor es positivo (sist. cartesiano)



<u>Caso 3-D:</u> Componentes rectangulares de una fuerza en el espacio.

Previamente vimos la descomposición de una fuerza contenida en un plano en sus componentes rectangulares. Esta misma idea es ampliable a fuerzas que poseen componentes en las tres dimensiones.



Primero descomponemos la fuerza F en el plano que la contiene, obteniendo

$$\mathbf{F_1=F \cdot sen(\theta) \qquad F_2=F_Z=F \cdot cos(\theta)}$$

Finalmente, para obtener las componentes en los ejes X e Y debemos descomponer la fuerza F1, la cual está contenida en el plano X-Y, por lo tanto:

$$\mathbf{F_X=F_1 \cdot sen(\alpha) \qquad F_Y=F_1 \cdot cos(\alpha)}$$

F_X=F·sen(θ)·sen(α) **F_Y=F·sen(θ)·cos(α)** **F_Z=F·cos(θ)**

$$\rightarrow \vec{F} = F_X \cdot \hat{x} + F_Y \cdot \hat{y} + F_Z \cdot \hat{z} = F_X \cdot \hat{i} + F_Y \cdot \hat{j} + F_Z \cdot \hat{k}$$

Finalmente, la magnitud de la fuerza F se calcula mediante el teorema de Pitágoras en función de las fuerzas proyectadas:

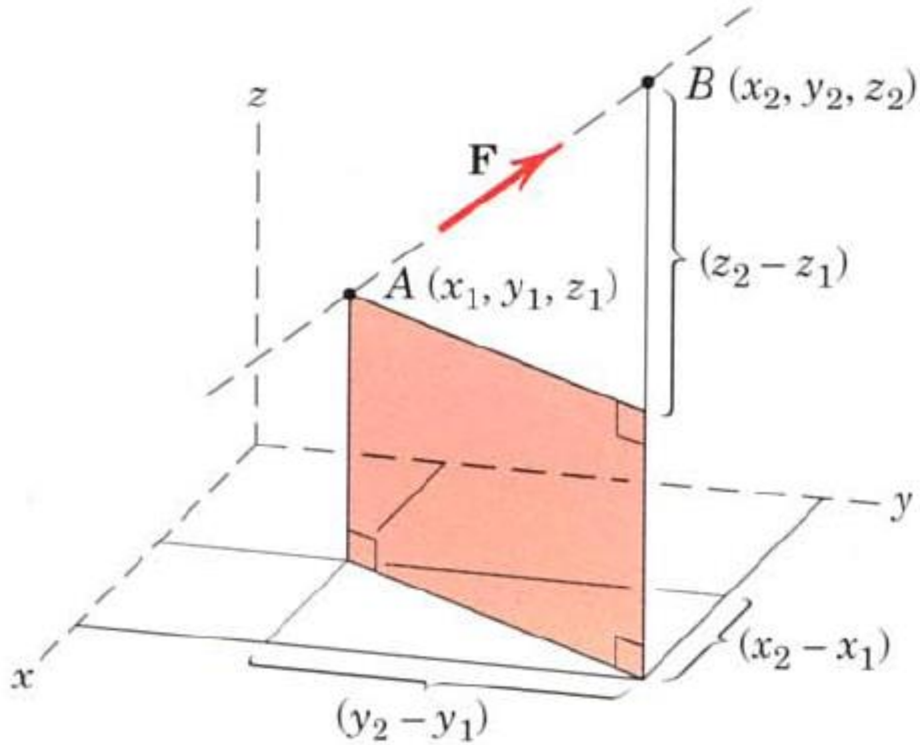
$$\left|\vec{F}\right| = F = \sqrt{F_X{}^2 + F_Y{}^2 + F_Z{}^2}$$

Es decir, podemos escribir, el vector de fuerza F de las siguientes maneras:

$$\vec{F} = \left|\vec{F}\right| \hat{n}$$

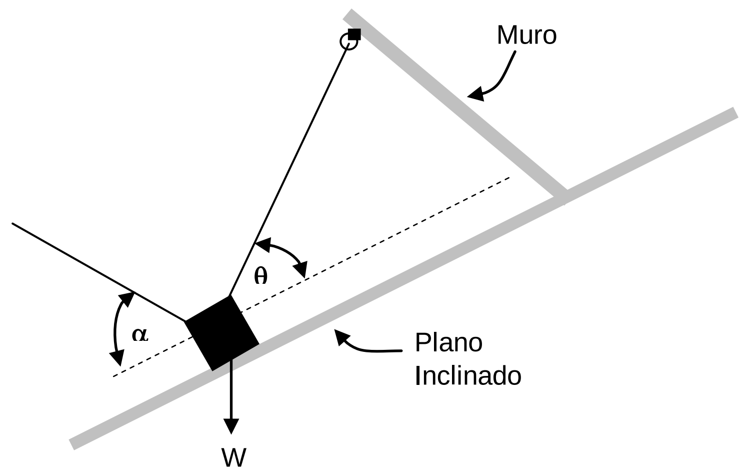
Si se conocen dos puntos de la línea de acción de la fuerza se puede expresar el vector de fuerza F en función de las coordenadas de los puntos conocidos y de la magnitud de la fuerza:

$$\vec{F} = \left|\vec{F}\right| \hat{n} = F \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|AB\right|} = F \frac{\left(x_2 - x_1\right)\hat{x} + \left(y_2 - y_1\right)\hat{y} + \left(z_2 - z_1\right)\hat{z}}{\sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2}}$$

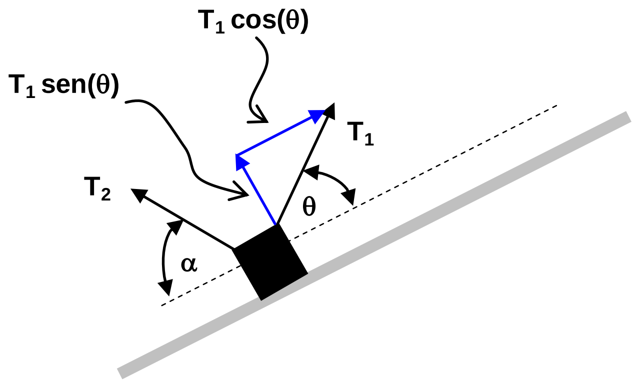


• Proyección de una fuerza según una dirección.

Como vimos anteriormente una fuerza puede descomponerse a través de infinitas combinaciones, sin embargo, para resolver la mayoría de problemas a los cuales nos veremos enfrentados se necesita descomponer dicha fuerza en una o más direcciones dadas. Un ejemplo muy común y simple es el caso de planos inclinados, como se muestra a continuación:



En este caso la manera más sencilla de resolver el problema será descomponer todas las fueras en un eje paralelo al plano inclinado y otro perpendicular a él. Así por ejemplo la fuerza del cable derecho se descompondrá como sigue:



En general, la proyección de una fuerza F en una dirección dada d se calcula como:

$$F_d = \vec{F} \cdot \hat{d} = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\hat{d}\right| \cdot \cos(\theta) = \left|\vec{F}\right| \cdot \cos(\theta)$$

Donde F_d: es la magnitud de la proyección de la fuerza F en la dirección d

$\hat{d}$: vector unitario de la dirección d

θ : ángulo formado entre la fuerza F y la dirección d

Además, ambos vectores se pueden descomponer en componentes ortogonales de un mismo sistema de referencia. Con lo cual la proyección se obtiene como sigue:

$$\vec{F} \cdot \hat{d} = (F_X \cdot \hat{x} + F_Y \cdot \hat{y} + F_Z \cdot \hat{z}) \cdot (\alpha \cdot \hat{x} + \beta \cdot \hat{y} + \gamma \cdot \hat{z}) = (F_X \cdot \alpha \cdot \hat{x} + F_Y \cdot \beta \cdot \hat{y} + F_Z \cdot \gamma \cdot \hat{z})$$

Ya que:

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1 \qquad \hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{y} \cdot \hat{x} = \hat{x} \cdot \hat{z} = \hat{z} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{z} = \hat{z} \cdot \hat{y} = 0$$

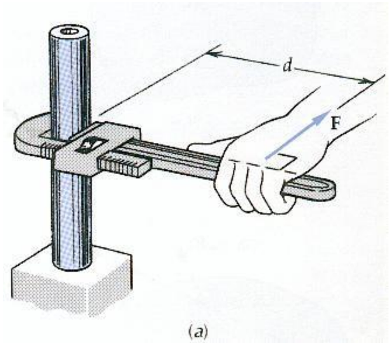
• **Momento de una fuerza con respecto a un punto y suma de momentos.**

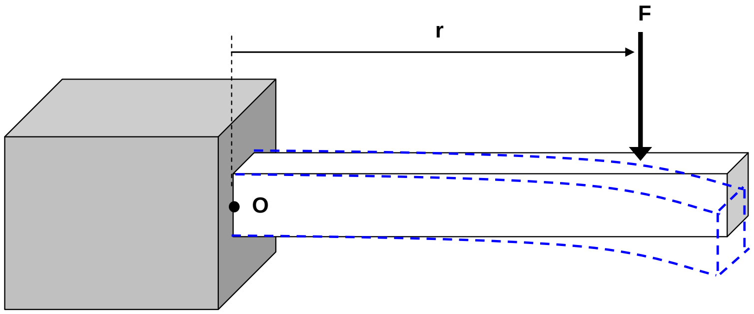
Además del <u>movimiento</u> que tiende a realizar una fuerza sobre el cuerpo que actúa, tiende también, a hacerlo <u>girar</u> alrededor de cualquier eje que no tenga la misma dirección que la misma fuerza. Esta tendencia de rotación o giro de la fuerza alrededor de un punto determinado se conoce como <u>momento (o torque)</u>.

Como vimos previamente, el efecto de una fuerza F depende de su punto de aplicación, lo cual está directamente relacionado con el momento que F produce sobre el cuerpo que actúa.

Se define el momento M de una fuerza F alrededor del punto O como el producto vectorial entre r y F, es decir: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \longrightarrow \vec{M} \perp \vec{r} \quad y \quad \vec{M} \perp F$

$\vec{r}$: vector que une el punto O con el punto de aplicación de la fuerza F



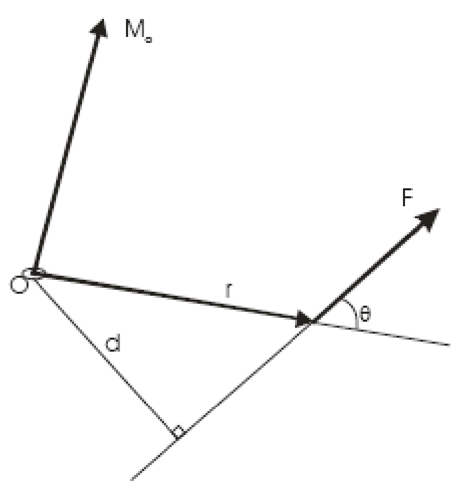


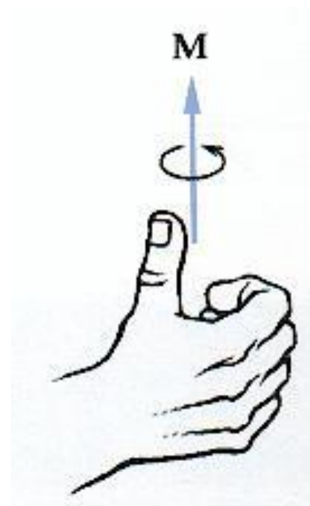
Por propiedad del producto vectorial la dirección del momento M debe ser perpendicular al plano formados por los vectores r y F, mientras que la magnitud está dada por:

$$\mathbf{M = r \cdot F \cdot sen(\theta) = F \cdot d}$$

Donde θ : ángulo comprendido entre las líneas de acción de los vectores r y F.
d : brazo del momento (proyección de r perpendicular a F)

Finalmente, el sentido del momento queda determinado por medio de la regla de la mano derecha:



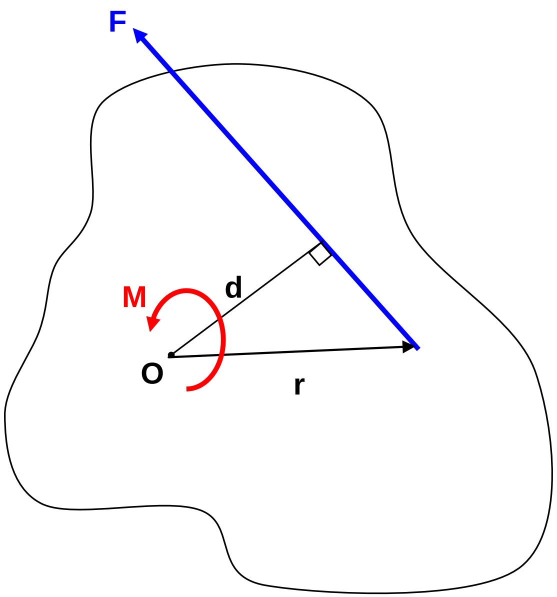


Momento positivo
(contrario manecillas del reloj)

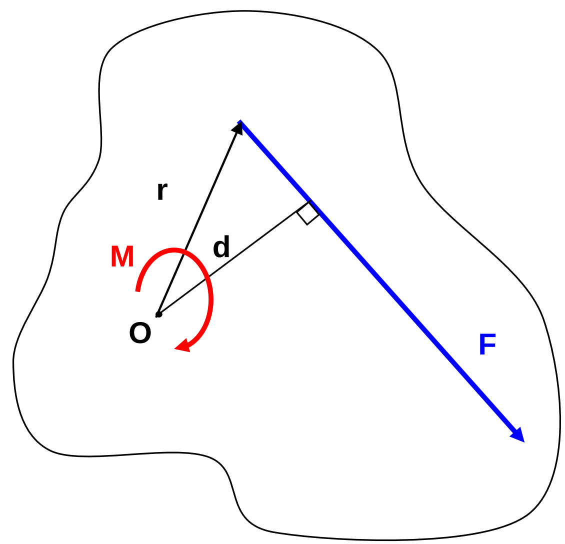
<u>Unidades</u>: [F]*[L] Por ejemplo: [Joule]=[N*m]; [tonf*m]; [lbf*ft]; etc.

<u>Caso 2-D:</u> Casos reales de estructuras bidimensionales (**losas, muros, muros de contención, paredes de estanques, etc**.). Para ilustrar estos casos, consideremos una placa rígida sobre la cual actúa una fuerza (**OJO** fuerza contenida en el plano). El momento de F con respecto a un punto O (cualquier punto fijo que pertenezca al plano de la placa) tiene una magnitud **F · d** y tiene dirección **perpendicular al plano**. El sentido lo definimos según la regla de la mano derecha, tal como se ilustra a continuación:

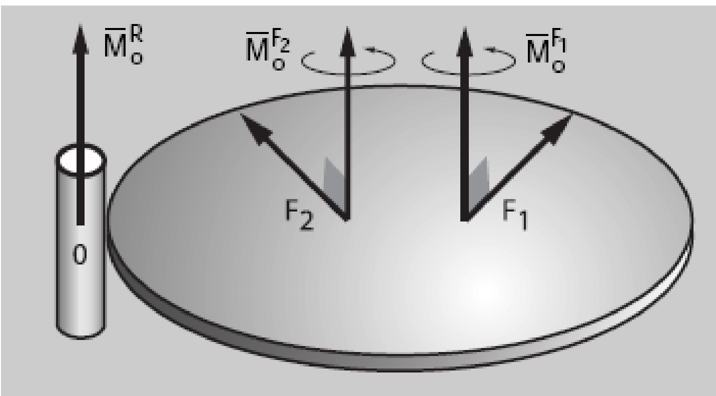
M = + F · d



M = - F · d



<u>Teorema de Varignon:</u> “El momento de la resultante de las fuerzas concurrentes, con respecto a un punto en su plano, es igual a la suma algebraica de los momentos de las componentes con respecto al mismo punto”.



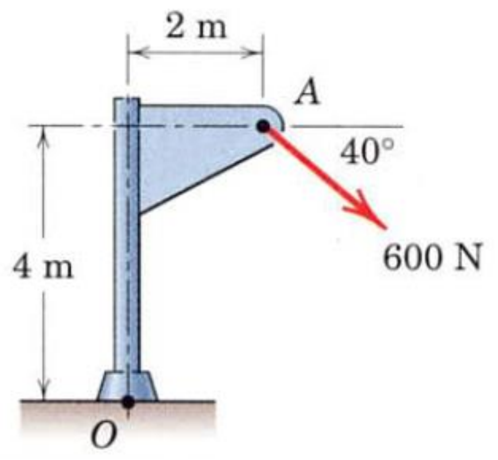
Si $R = F_1 + F_2 + \ldots + F_i$

$\rightarrow M^R = r \times R = M^{F1} + M^{F2} + \ldots + M^{Fi}$

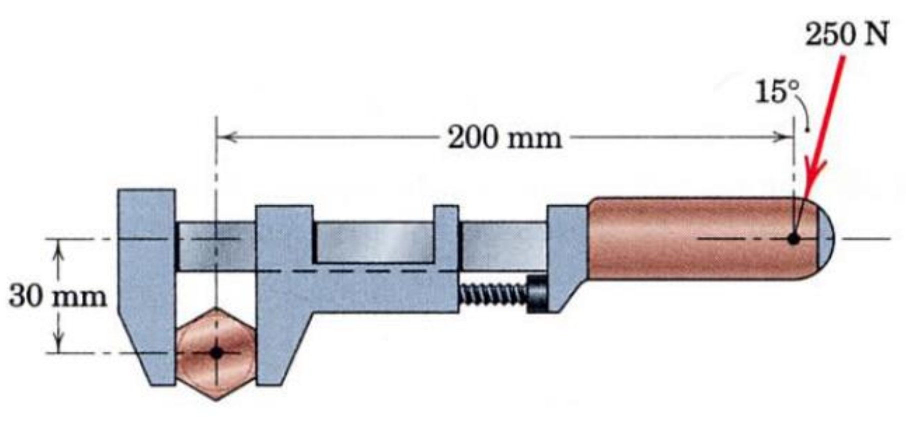
$M^R = r \times F_1 + r \times F_2 + \ldots + r \times F_i$

Ejemplo.

Calcule el momento que produce la fuerza F respecto al punto O. Utilice 3 métodos diferentes.

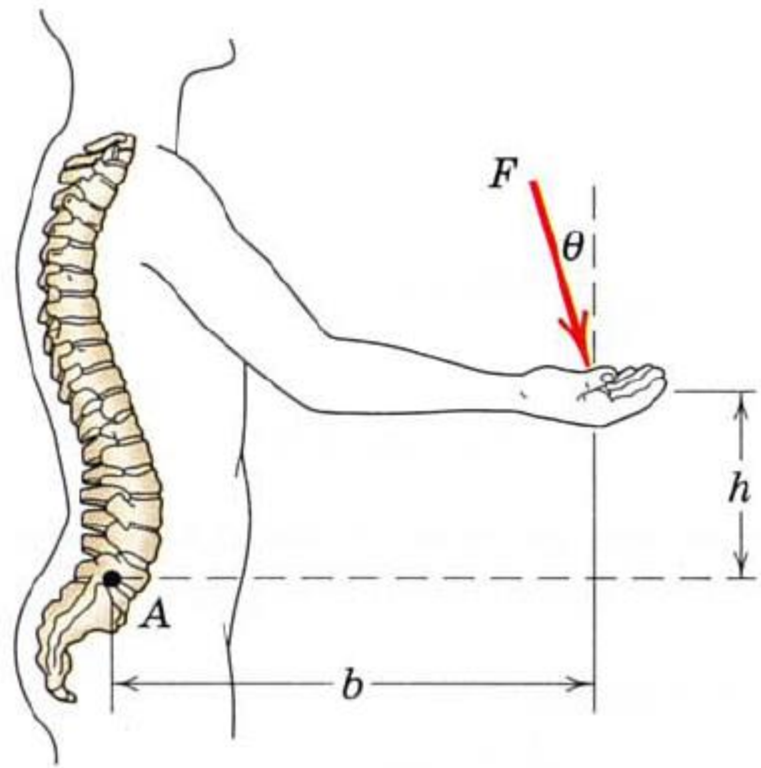


Calcule el momento que produce la fuerza F aplicada al mango de la llave ajustable respecto al centro del perno.



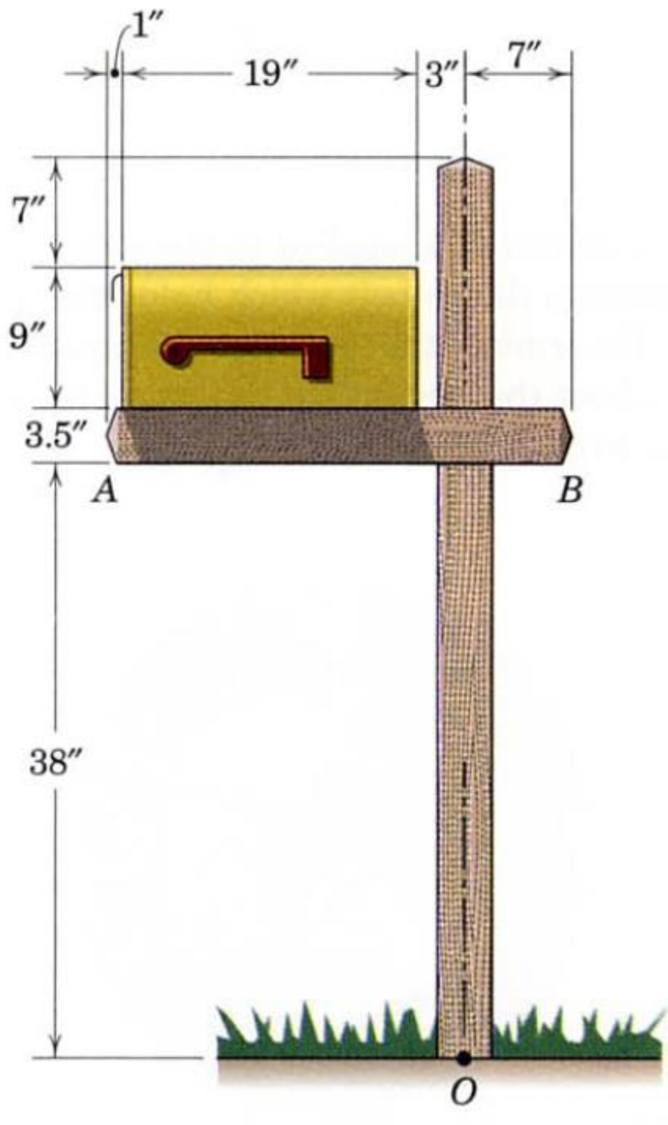
Ejemplo.

La región lumbar inferior de la espina dorsal es la más susceptible a las fuerzas que carga el humano. Dado F, b y h se le pide calcular el ángulo θ que causa el mayor momento de flexión en la región lumbar inferior (punto A).

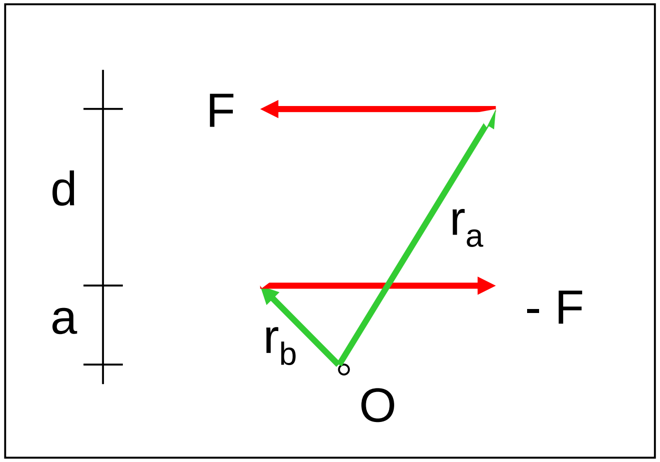


Propuesto.

Determine el momento que producen el buzón (W_b=4 lbf) y la tabla de madera AB (W_t=10 lbf) con respecto al punto O.



Par: dos fuerzas F y –F forman un par si poseen la misma magnitud, dirección y líneas de acción paralelas y sentido opuesto. Lógicamente la fuerza resultante de un par es nulo, sin embargo, el momento de un par con respecto a un punto dado no es cero.

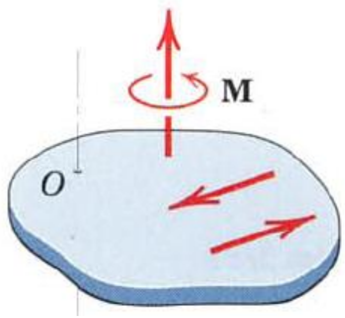


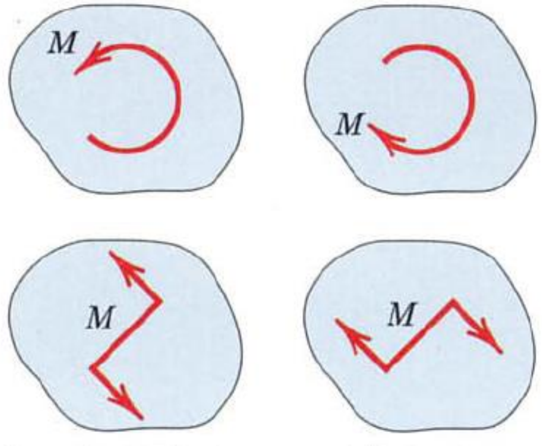
$$\left|\mathbf{M}\right| = \mathbf{F \cdot (a + d) - F \cdot a = F \cdot d}$$

es decir, el momento de un par vale siempre los mismo, independiente del polo.

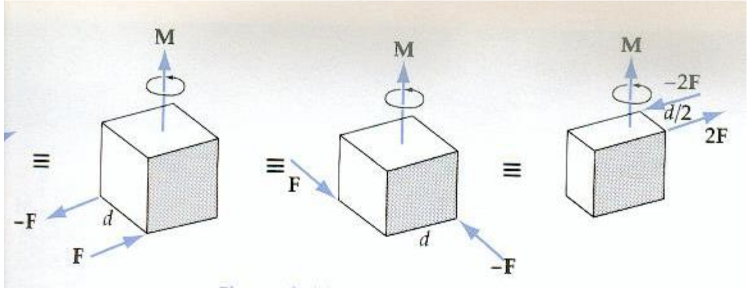
Otra forma de verlo es directamente del producto vectorial:

$$M = (\vec{r}_a) \times (\vec{F}) + (\vec{r}_b) \times (-\vec{F}) = (\vec{r}_a - \vec{r}_b) \times (\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

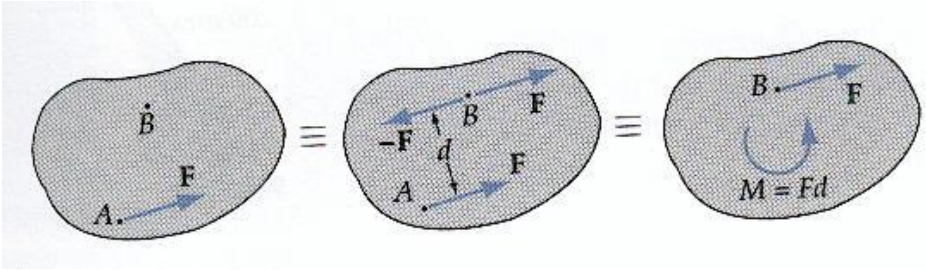




Existen infinitos pares que tienen el mismo efecto sobre un cuerpo.

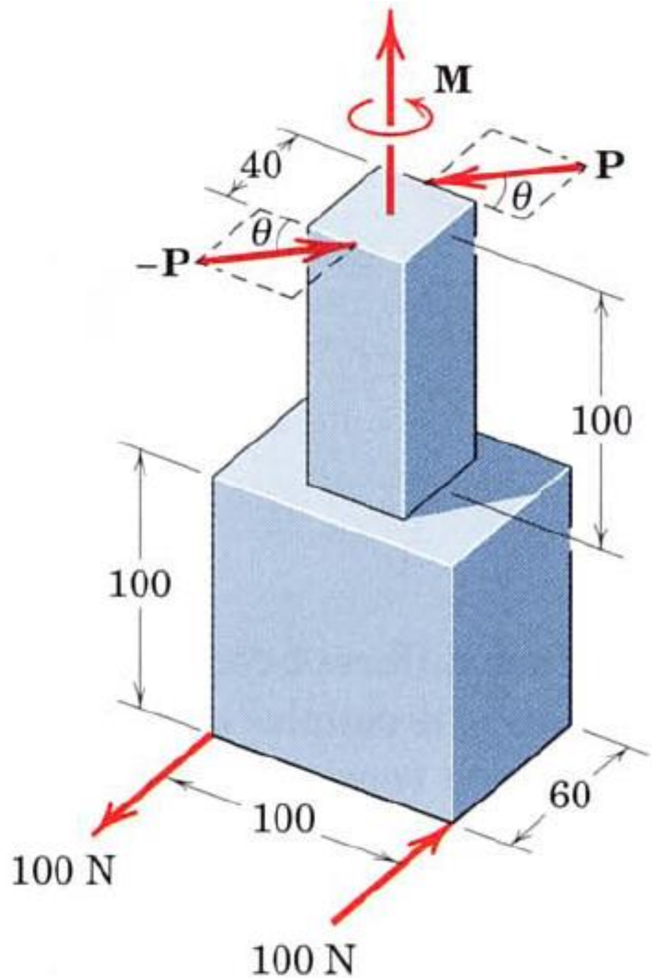


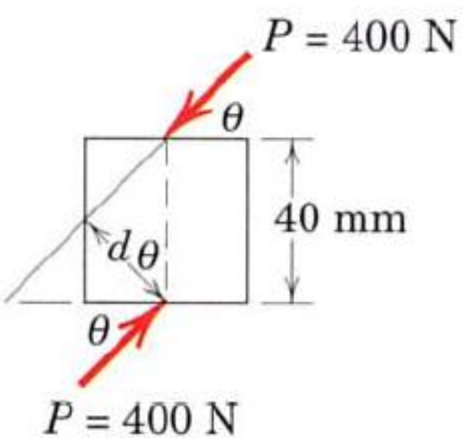
Finalmente, una fuerza que está aplicada en un punto A de un cuerpo es equivalente a un sistema fuerza-par (o fuerza-momento) en un punto distinto B, a través de la siguiente transformación:



Ejemplo.

La estructura rígida de la figura esta sometida a un par de fuerzas de 100 N. Reemplace este par por otro par equivalente cuya magnitud de las fuerzas es de P=400 N. Determine el ángulo θ.



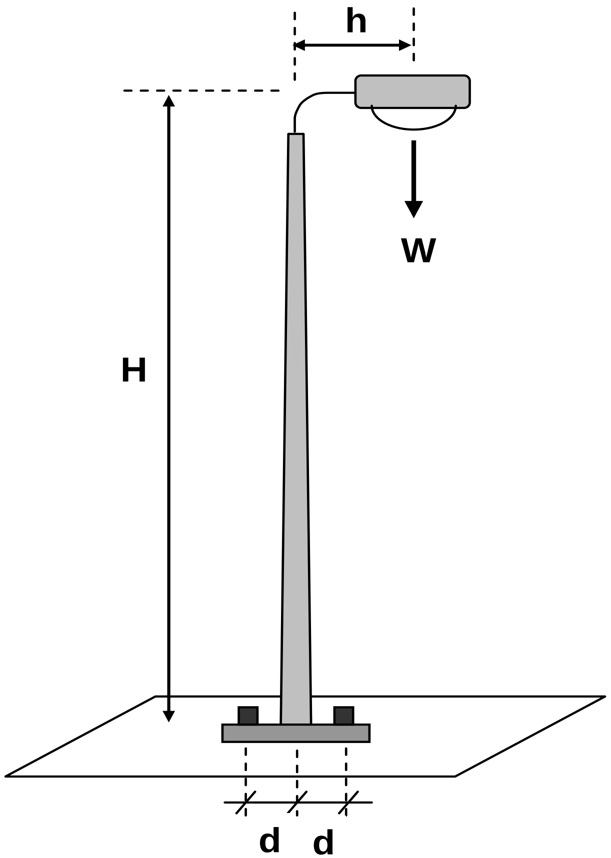


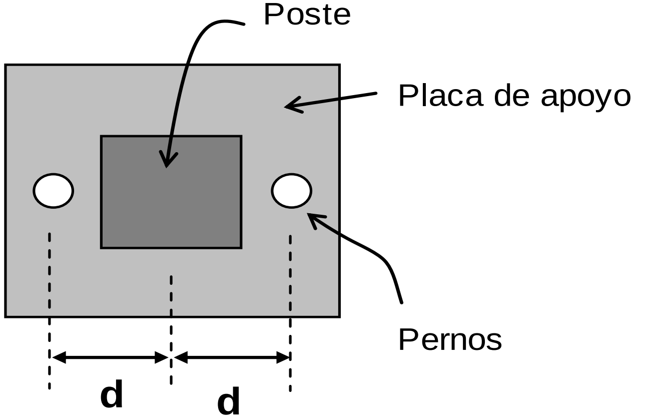
Dimensiones en [mm]

Ejemplo.

Para el poste de alumbrado de la figura determine las fuerzas verticales que debe resistir cada perno de anclaje. Asuma que por la simetría del sistema de anclaje, las fuerzas de los pernos que resisten el momento actúan como un par. Suponga que el tubo del poste posee un peso por unidad de longitud γ (constante en toda la altura H).

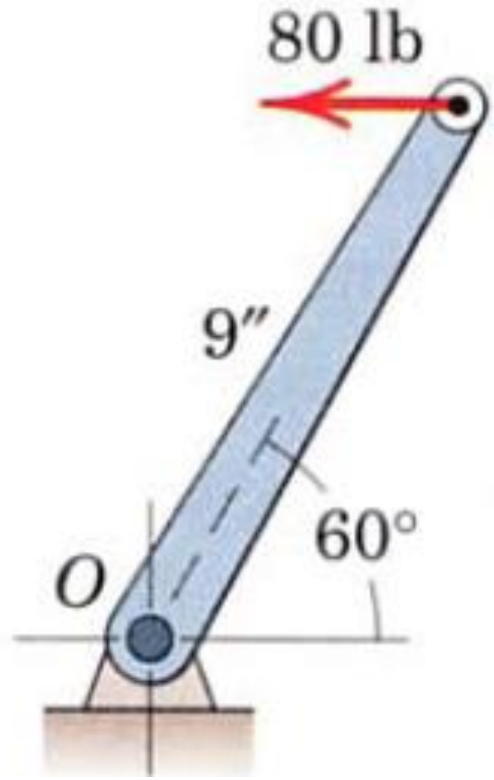
Datos: W=100 [kgf], H=7 [m], h=1.5 [m], d=20 [cm], γ=2.8 kgf/m





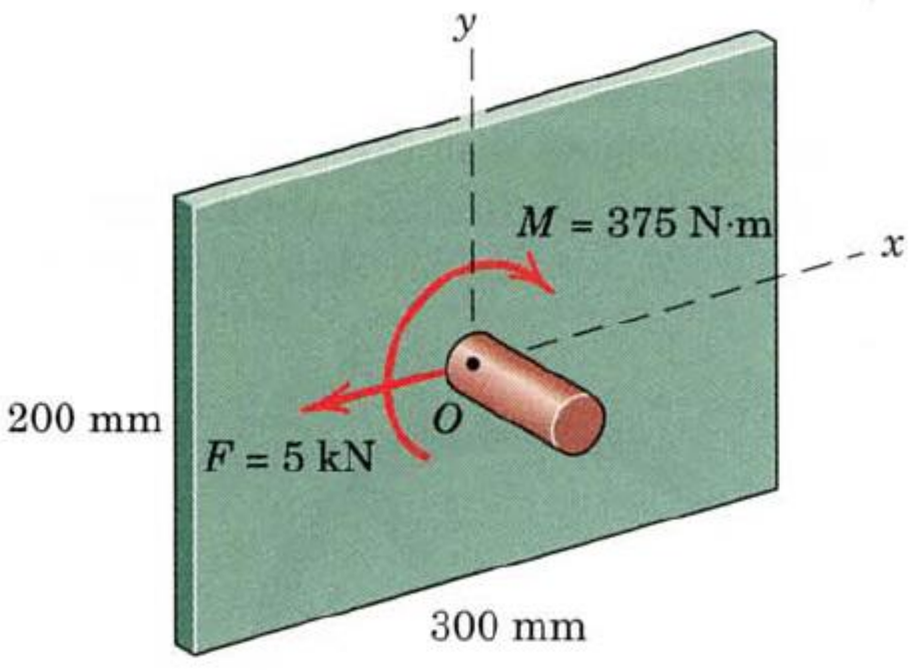
Ejemplo.

Reemplace la fuerza de 80 lbf por un sistema equivalente (fuerza-momento) en el punto O.



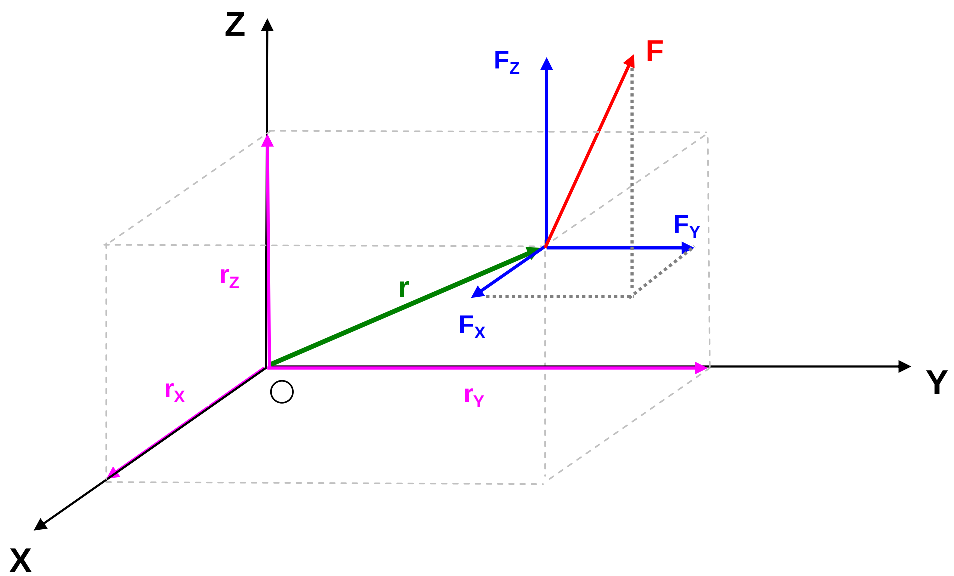
Ejemplo.

Reemplace el sistema fuerza-momento por una única fuerza. Determine la coordenada y de la línea de acción de dicha fuerza.



Caso 3-D: Para este caso resulta complicado calcular las distancias perpendiculares entre un punto (punto en torno al cual se calcula el momento) y una recta (fuerza). Por lo cual se recomienda el uso del producto vectorial directamente.

De este modo lo mas conveniente es descomponer tanto el vector posición como la fuerza en coordenadas cartesianas, y luego el momento está dado por:

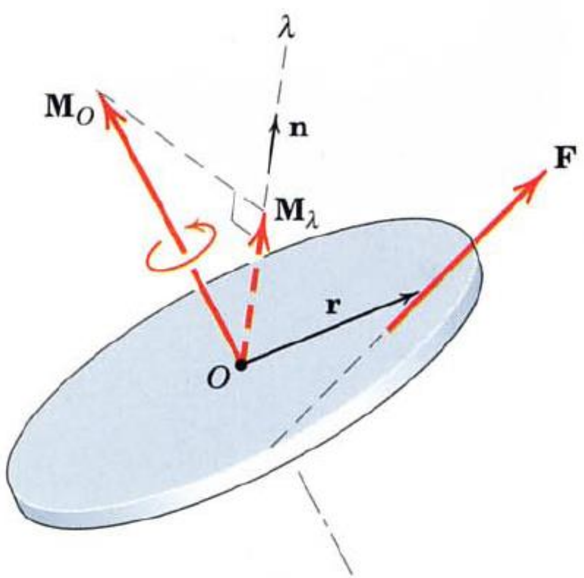


$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{M} = (r_Y \cdot F_Z - r_Z \cdot F_Y) \cdot \hat{x} + (r_Z \cdot F_X - r_X \cdot F_Z) \cdot \hat{y} + (r_X \cdot F_Y - r_Y \cdot F_X) \cdot \hat{z}$$

Momento proyectado en torno a un eje:

El momento que produce una fuerza F en torno a un eje λ se puede obtener fácilmente a través de:

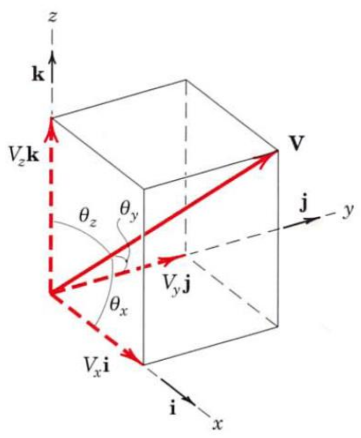


$$\vec{M}_\lambda = \vec{M}_O \cdot \hat{n} = \left[\left(\vec{r} \times \vec{F}\right) \cdot \hat{n}\right] \hat{n}$$

O bien, mediante el determinante:

$$\left|\vec{M}_\lambda\right| = \begin{vmatrix} r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

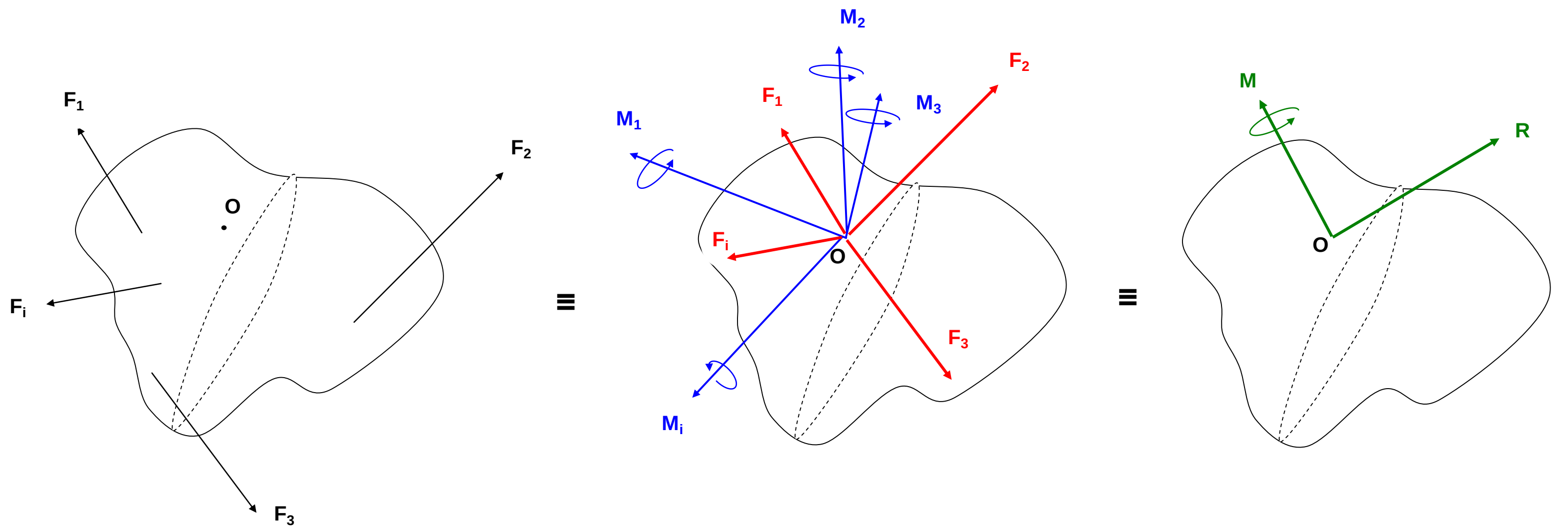
Donde α, β y γ son los cosenos directores de $\hat{n}$



$$\alpha = \cos(\theta_x) \qquad \beta = \cos(\theta_y) \qquad \gamma = \cos(\theta_z)$$

- **Resultantes.**

Todos los puntos anteriormente expuestos se resumen en la determinación de la resultante de una serie de fuerzas y momentos que poseen distintos puntos de aplicación. De este modo un cuerpo que posee múltiples fuerzas aplicadas es equivalente al mismo cuerpo con un par fuerza-momento.



$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\,O} + \vec{M}_i^{\,O} \quad \longrightarrow \quad \vec{R} = \sum_i \vec{F}_i \qquad \vec{M}^{O} = \sum_i \vec{M}_i^{\,O} = \sum_i r_i \times F_i$$

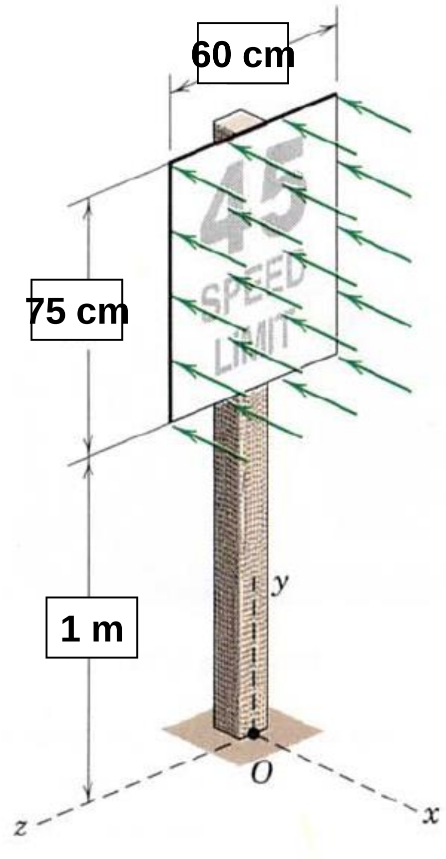
O bien, en función de las componentes ortogonales:

$$R_X = \sum F_X \qquad R_Y = \sum F_Y \qquad R_Z = \sum F_Z \qquad M_X = \sum (r \times F)_X \qquad M_Y = \sum (r \times F)_Y \qquad M_Z = \sum (r \times F)_Z$$

$$R = \sqrt{\left(\sum F_X\right)^2 + \left(\sum F_Y\right)^2 + \left(\sum F_Z\right)^2} \qquad M = \sqrt{M_X^{\,2} + M_Y^{\,2} + M_Z^{\,2}}$$

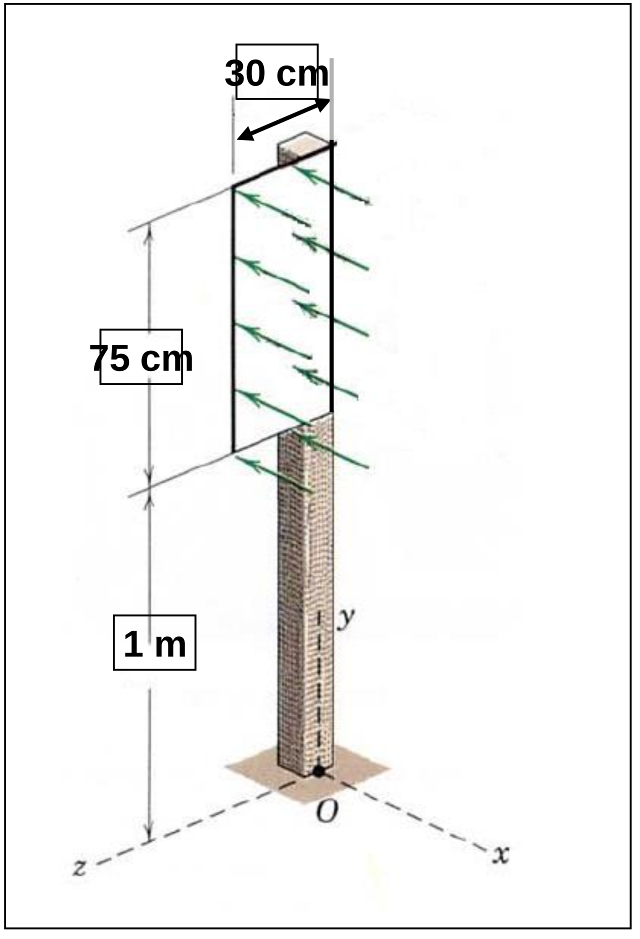
Ejemplo.

El viento que actúa sobre el letrero de la figura produce una presión uniforme de 150 kgf/m2 en la dirección perpendicular al letrero. Determine el momento que produce el viento con respecto al punto O. Utilice el sistema de coordenadas mostrado.



Ejemplo.

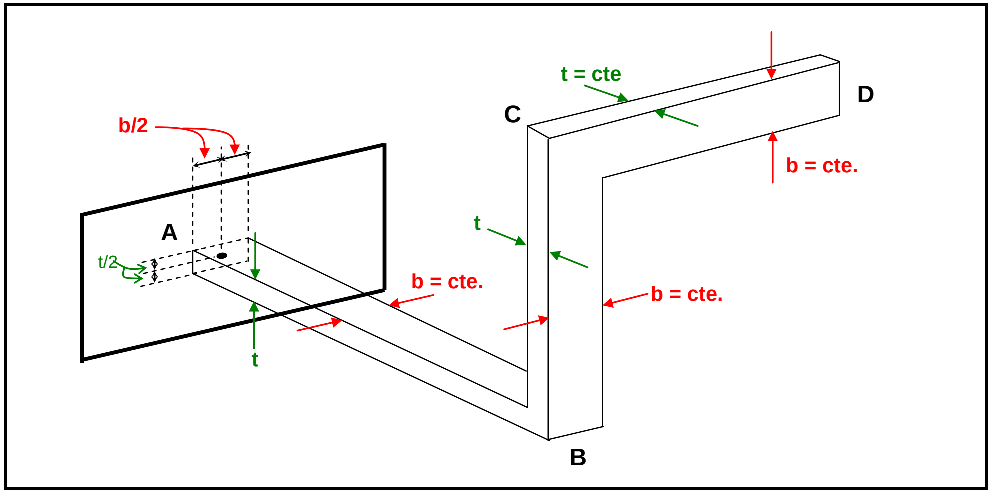
El viento que actúa sobre el letrero de la figura produce una presión uniforme de 150 kgf/m2 en la dirección perpendicular al letrero. Determine el momento que produce el viento con respecto al punto O. Utilice el sistema de coordenadas mostrado.

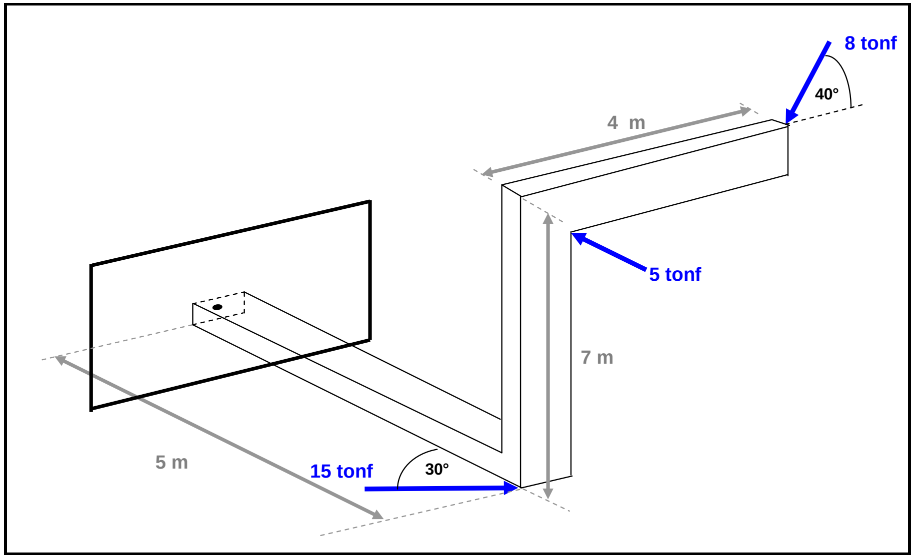


Ejemplo.

En la siguiente figura se muestra una canaleta que esta empotrada en la zona del punto A. Sobre ella actúan tres fuerzas tal como se muestra en la figura.

- Descomponga las fuerzas en un sistema de ejes cartesianos elegidos convenientemente.
- Determine el sistema fuerza-momento equivalente en el punto A.
- Calcule la proyección de la fuerza que actúa en B en la dirección de la normal al plano que pasa por los puntos (1, 0, 0) (0, 1, 0) (0, 0, 1).

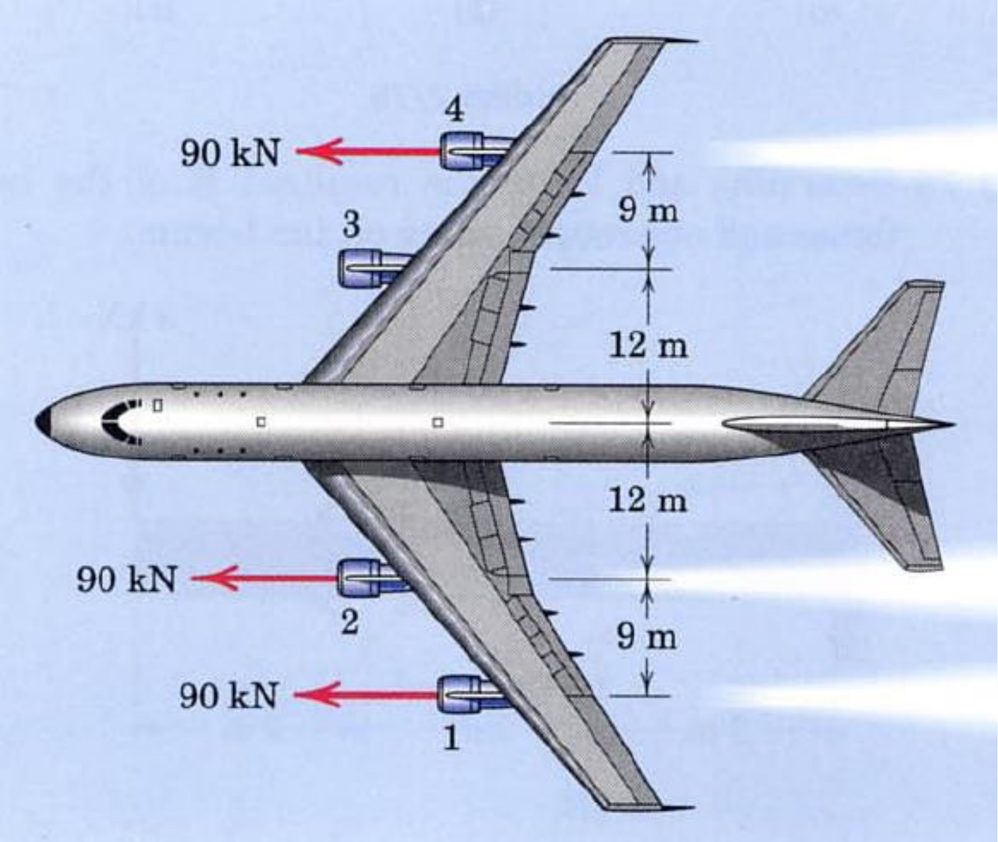




Nota:
- La fuerza de 5 [tonf] es paralela al tramo AB.
- La fuerza de 15 [tonf] no tiene componente vertical.
- La fuerza de 8 [tonf] no tiene componente en la dirección del tramo AB.

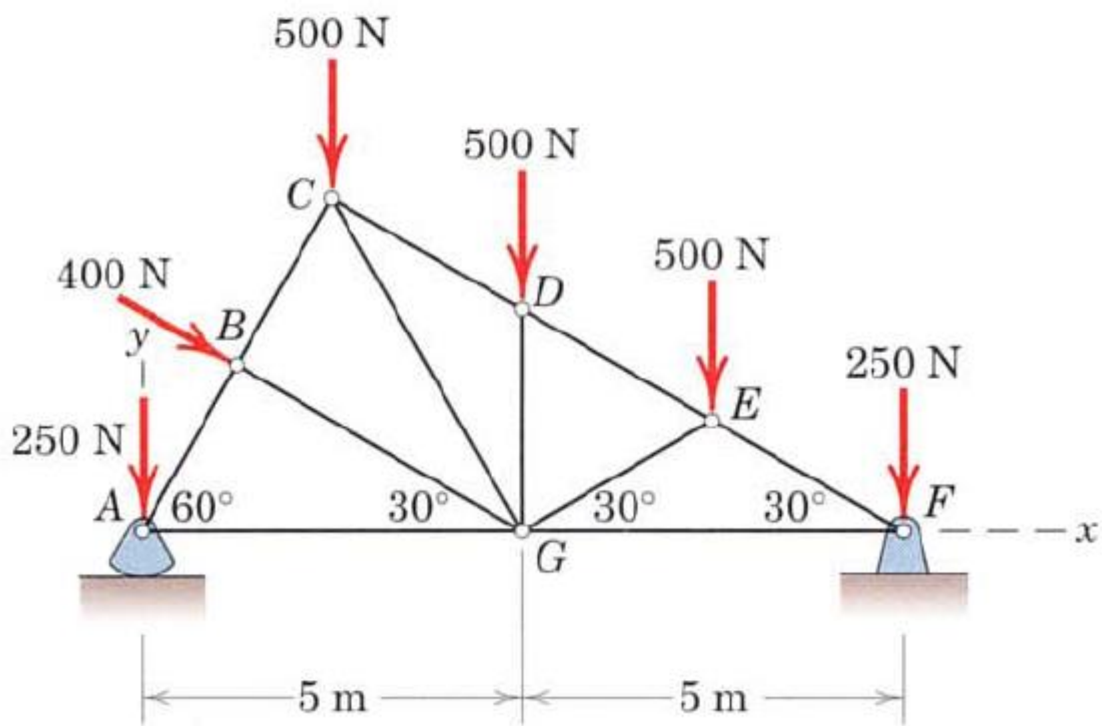
Propuestos:

Las turbinas de un avión comercial generan una fuerza de 90 kN. Si repentinamente una turbina falla, calcule la magnitud y la ubicación de la resultante de las tres turbinas en funcionamiento.



Propuestos:

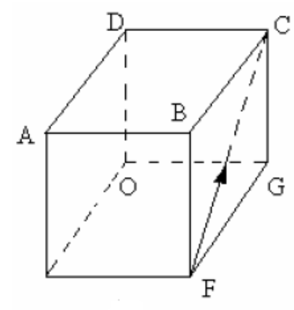
Para el enrejado de la figura se le pide determinar un sistema fuerza-momento en el punto A equivalente a todas las fuerzas mostradas, las cuales actúan sobre los nodos del enrejado y representan el viento (fuerza inclinada) y las cargas de techo (fuerzas verticales). Además, calcule la posición x donde intersecta la línea de acción de otro sistema equivalente formado sólo por una fuerza R.



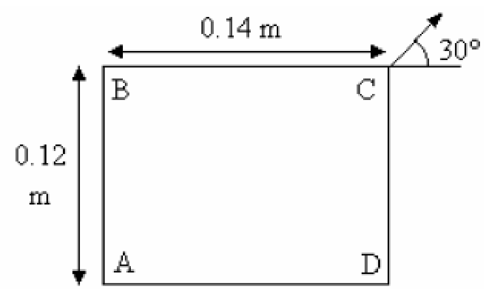
Propuestos:

1- Sobre un cubo de lado **a** actúa una fuerza F como se indica en la figura. Calcular el momento de esta fuerza:

- Con respecto al punto A
- Con respecto al eje AB
- Con respecto a la diagonal AG



2- Una fuerza de 1200 [N] actúa en una esquina de la placa tal como se indica en la figura. Hallar el momento de esta fuerza con respecto al punto A.



3- Sobre una barra inclinada la cual se encuentra unida a un eje por un punto O actúa una fuerza vertical F=300 [N].

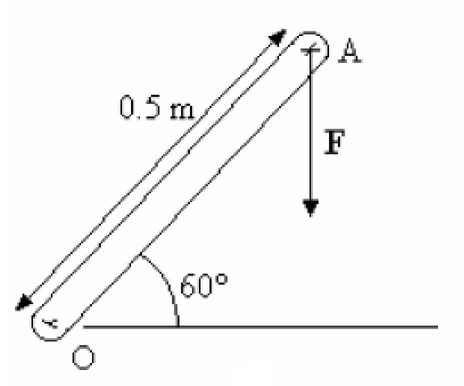
a- Calcular el momento de esta fuerza respecto del punto O.

b- Calcular el módulo de la fuerza horizontal que aplicada en el punto A produce el mismo momento respecto a O.

c- ¿Cuál será la fuerza más pequeña que aplicada en el punto A produce el mismo momento con respecto al punto O?

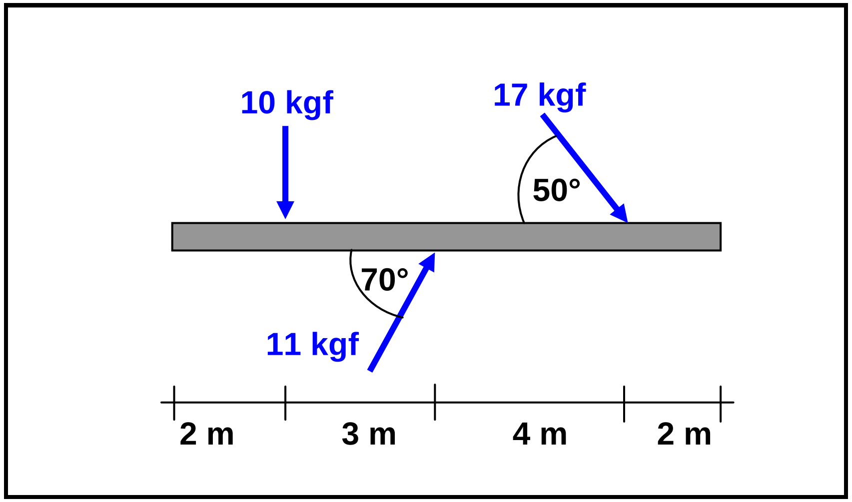
d- ¿A qué distancia del eje que pasa por el punto O debe actuar una fuerza vertical de 750 [N] para producir el mismo momento c/r al punto O?

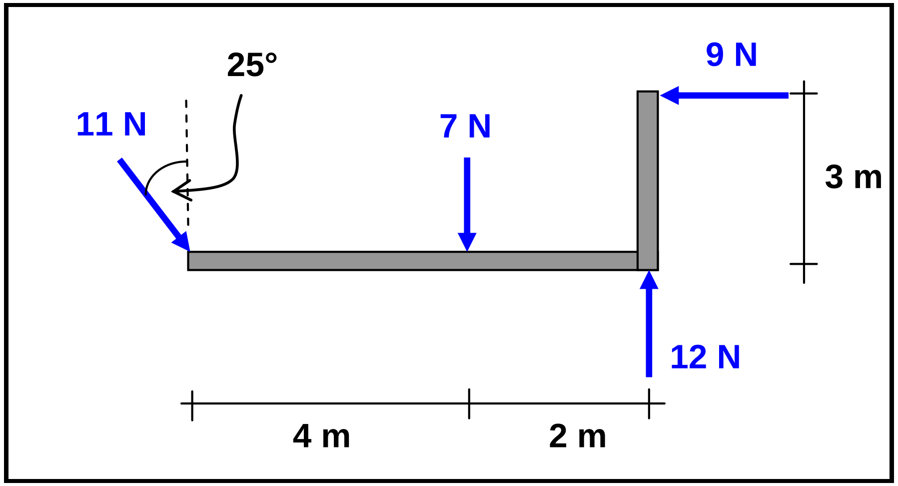
e- ¿Alguna de las fuerzas obtenidas en b, c o d es mecánicamente equivalente a la fuerza considerada en a?

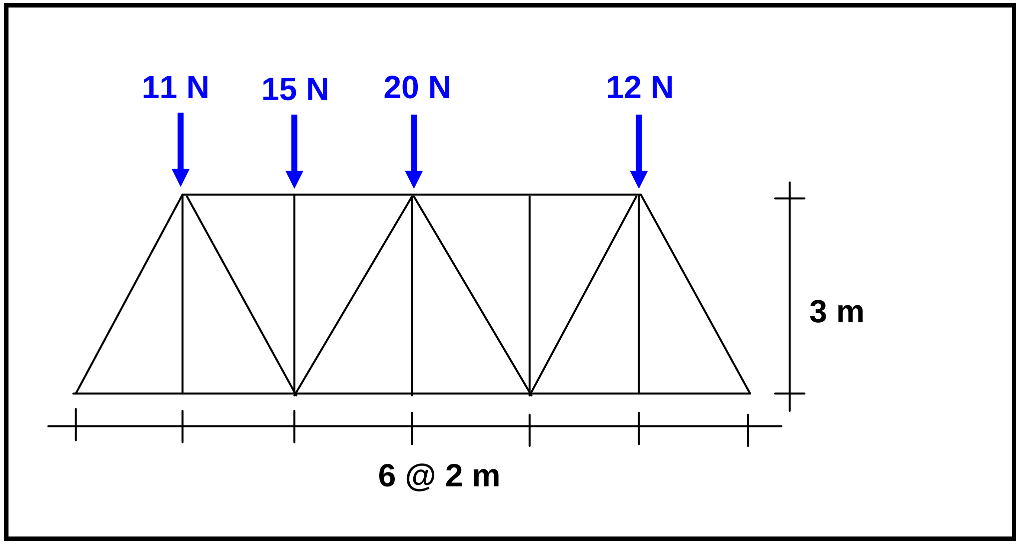


Propuesto

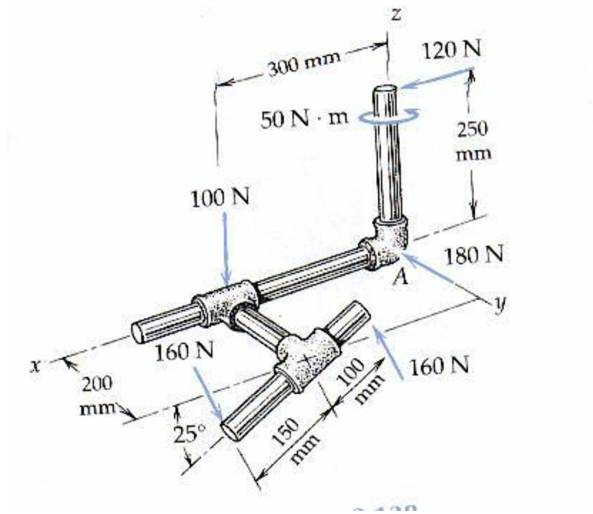
1. Para las siguientes configuraciones de sistemas de fuerzas determinar el vector de fuerza **equivalente** (Magnitud, dirección, sentido y punto de aplicación) <u>analíticamente</u>.



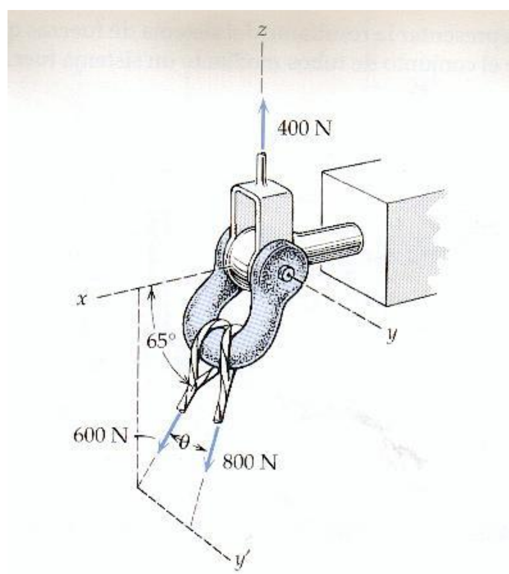




2- Representar la resultante del sistema de fuerzas que actúan sobre el conjuntos de tuberías mediante un sistema fuerza-par en A.

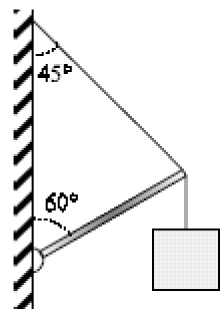


3- Determinar el ángulo q para que la fuerza neta vertical sobre el cáncamo fijo sea de 750 [N]. Determinar la magnitud de la correspondiente fuerza resultante y sus cosenos directores.

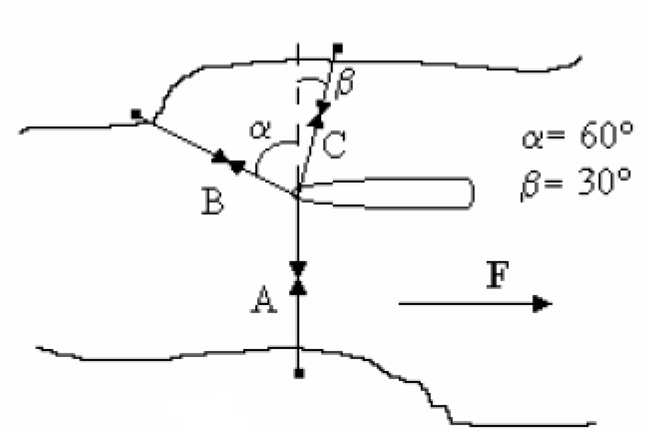


Propuestos:

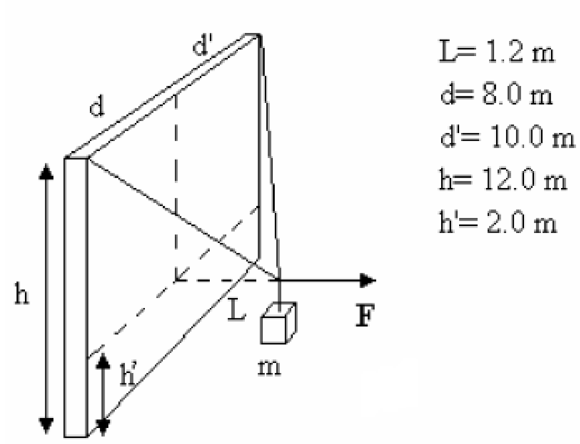
1- Calcular la fuerza del cable y el módulo y dirección de la fuerza que ejerce el pivote sobre el puntal (de masa despreciable), en el sistema de la figura, siendo 1000 kg. la masa del bloque suspendido.



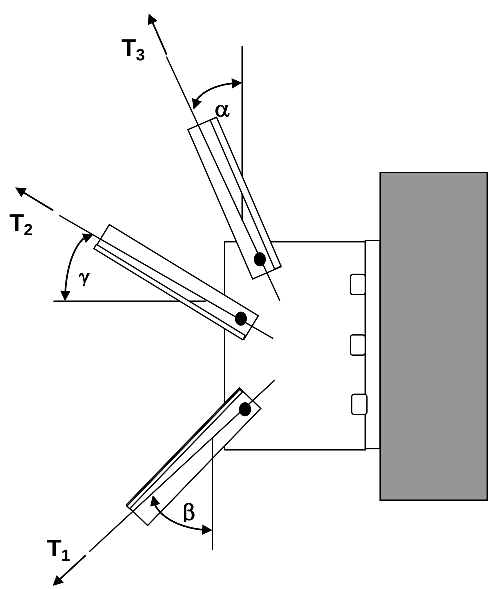
2- Un bote está amarrado a la orilla del río por medio de 3 cuerdas, como se indica en la figura. La corriente del río ejerce una fuerza sobre el bote en la dirección y sentido mostrado. Las fuerzas medidas en las cuerdas A y B son 120 y 80 [N] respectivamente. Calcular la fuerza ejercida por la corriente (F) y la fuerza de la cuerda C si el bote está en reposo.



3- Una masa de 200 kg cuelga de dos cables que están sujetos a la parte superior de una pared vertical como se indica en la figura. Si la fuerza F (perpendicular a la pared) sostiene esta masa en equilibrio, hallar el módulo de la fuerza F y la tensión (fuerza) en cada cable.

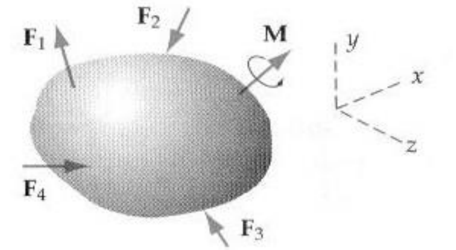
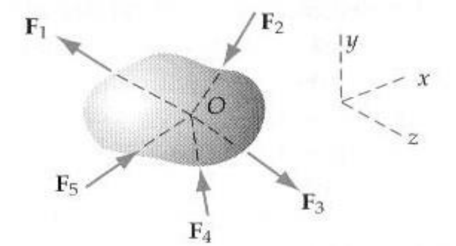
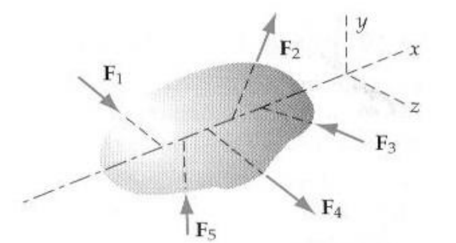
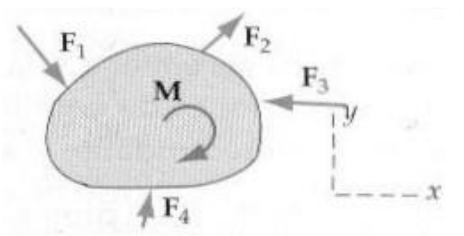


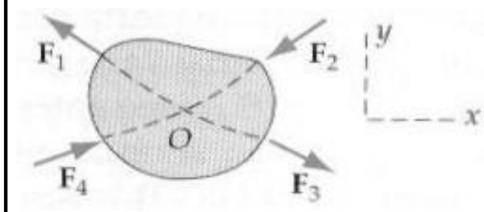
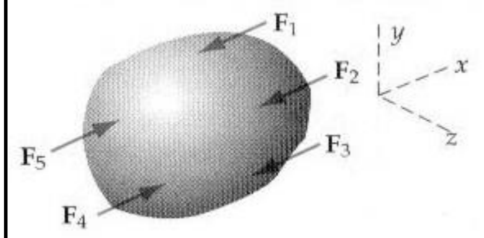
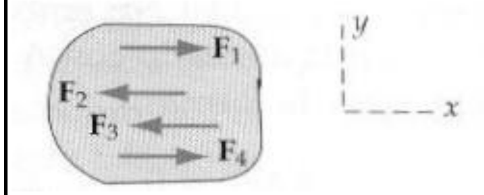
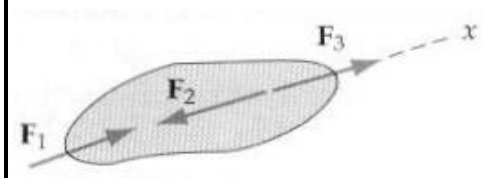
4- En la figura siguiente se muestra una conexión a la cual concurren tres elementos estructurales. Determinar, mediante la descomposición de las fuerzas, la magnitud la dirección y el sentido de la fuerza resultante (suponga que las tres fuerzas concurren a un mismo punto).



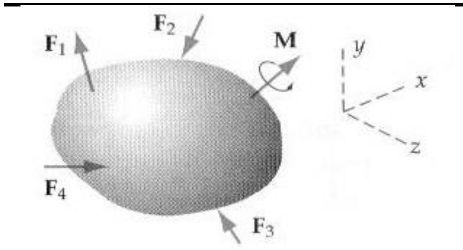
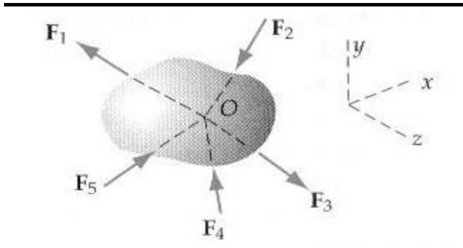
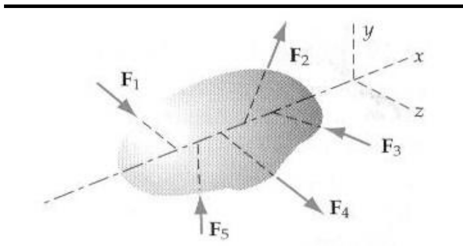
Clasificación de los sistemas de fuerzas

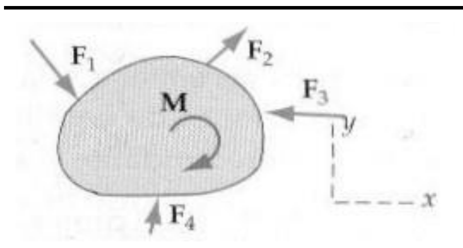
Los sistemas de fuerzas se pueden clasificar en los tipos siguientes:

	TIPO	DESCRIPCIÓN	FIGURA
1	Tridimensional	Las fuerzas poseen componentes en todos los planos	
2	Tridimensional concurrente a un punto	Las líneas de acción de todas las fuerzas del sistema son concurrentes a un mismo punto.	
3	Tridimensional concurrente a una recta	Las líneas de acción de todas las fuerzas del sistema son concurrentes a un misma recta.	
4	Coplanar	Todas las fuerzas del sistema están contenidas en un mismo plano.	

	TIPO	DESCRIPCIÓN	FIGURA
5	Coplanar concurrente	Todas las fuerzas del sistema están en un mismo plano y sus líneas de acción concurren a un mismo punto.	
6	Paralelo	Las líneas de acción de todas las fuerzas del sistema son paralelas.	
7	Coplanar paralelo	Las líneas de acción de todas las fuerzas del sistema son paralelas y están contenidas en un mismo plano.	
8	Colineal	Las líneas de acción de todas las fuerzas del sistema son coincidentes.	

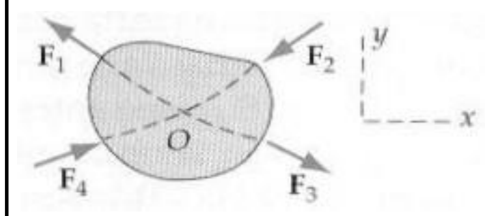
Para cada uno de estos tipos de sistemas, el <u>número de ecuaciones de equilibrio independientes</u> que se puede establecer es diferente y es igual al número de componentes distintas de cero que tienen la resultante de fuerza y momento del sistema. Así se tiene:

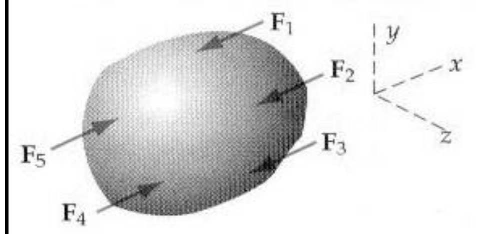
<table>
<tr><th></th><th>TIPO</th><th>ECS. INDEPENDIENTES</th><th>FIGURA</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Tridimensional</td><td>$\boxed{6}$ $\sum F_X = 0$ $\sum M_X = 0$
$\sum F_Y = 0$ $\sum M_Y = 0$
$\sum F_Z = 0$ $\sum M_Z = 0$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Tridimensional
concurrente a un punto</td><td>$\boxed{3}$ $\sum F_X = 0$
$\sum F_Y = 0$
$\sum F_Z = 0$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Tridimensional
concurrente a una
recta</td><td>$\boxed{5}$ $\sum F_X = 0$
$\sum F_Y = 0$ $\sum M_Y = 0$
$\sum F_Z = 0$ $\sum M_Z = 0$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Coplanar</td><td>$\boxed{3}$ $\sum F_X = 0$
$\sum F_Y = 0$

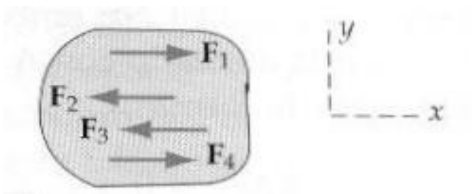
$\sum M_Z = 0$</td><td>
</td></tr>
</table>

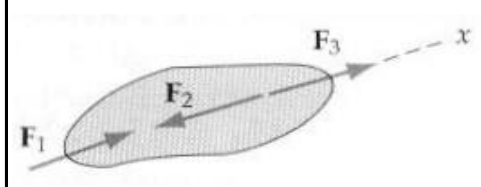
	TIPO	ECS. INDEPENDIENTES
5	Coplanar concurrente	**2** $\sum F_X = 0$ $\sum F_Y = 0$
6	Paralelo	**3** $\sum F_X = 0$ $\sum M_Y = 0$ $\sum M_Z = 0$
7	Coplanar paralelo	**2** $\sum F_X = 0$ $\sum M_Z = 0$
8	Colineal	**1** $\sum F_X = 0$

FIGURA









Sistema de fuerzas equivalentes

- Reducción de un sistema de fuerzas: Determinación de la resultante de un sistema de fuerzas respecto a un punto.

- Se dice que dos sistemas de fuerzas son equipolentes, o equivalentes, si ambos tienen igual reducción respecto al mismo punto.