



Auxiliar 6: Combinatoria

Miércoles 23 de Noviembre, 2016

P1. [Combinatoria] En una micro del transporte público que se encuentra efectuando el recorrido más largo del transantiago, hay n pasajeros y este debe efectuar m paradas distintas. Calcule de cuantas maneras se pueden bajar los pasajeros tomando en cuenta que:

a) Los pasajeros son distinguibles entre sí.

Sol: Cada pasajero tiene m posibilidades, luego como son n pasajeros y cada uno es distinto del otro, por regla del producto la cantidad de formas es m^n .

b) Los pasajeros son indistinguibles entre sí.

Sol: Este caso equivale a la cantidad de formas en que se pueden distribuir n bolitas indistinguibles del mismo color en m urnas distinguibles, donde las bolitas equivalen a las personas y las urnas a las paradas. Esto equivale a $\binom{n+m-1}{m-1}$ (¿De dónde sale este número mágico? Ver P3).

c) Los pasajeros son indistinguibles entre si y se sabe que en la parada i -ésima bajan al menos n_i personas.

Sol: Sabemos que en cada parada bajan exactamente n_i personas, como son indistinguibles entonces estas personas solo tienen una forma de bajarse (se puede pensar como la cantidad de formas de meter n_i bolitas negras en una urna: primero una bolita negra, luego otra bolita negra y así... en resumen, solo hay una forma que se puede contar de hacer esto) luego solo nos importan las $n - \sum_i n_i$ personas, pues estas son las que se pueden bajar en distintas cantidades en cada parada. De lo anterior la cantidad de formas es $\binom{n - \sum_i n_i + m - 1}{m - 1}$.

- En cierto semáforo esta micro se topa con otras 6 y se dividen en equipos: 2 rojas, 3 verdes, una azul y una celeste. Estas deciden recordar los viejos tiempos y competir por quien llega primero hasta el k -ésimo paradero.

d) ¿De cuántas maneras puede resultar la competencia?

Sol: Como solo nos importan los equipos, las micros de cada equipo son indistinguibles entre si. Tomamos la cantidad total de llegada sin equipos $7!$, esta sería la cantidad si las micros fueran distinguibles, por lo que para tener el resultado debemos quitarle la cantidad extra de combinaciones de micros del mismo equipo (pues una micro roja es indistinguible de otra roja). Luego el resultado es $\frac{7!}{2!3!1!1!}$

e) ¿De cuántas formas puede ocurrir que una micro del equipo rojo este entre los 3 primeros lugares y la otra en el último?

Sol: La cantidad de formas en que una micro del equipo rojo tome alguno de los tres primeros puestos es $\binom{3}{1}$, por otro lado, dado que son indistinguibles solo hay una forma de que una este al final, estas combinaciones se multiplican por la cantidad de formas de ordenar el resto de las micros en los puestos que quedan, es decir $\frac{5!}{3!1!1!}$. Por lo que el resultado pedido es $\left(1 \frac{3}{3!1!1!}\right)$.

P2. [Principio del palomar]

a) Demuestre que de 5 puntos en el plano cartesiano que tienen coordenadas enteras siempre hay un par de puntos cuyo punto medio es un entero.

Sol: Primero notemos que hay 4 combinaciones para la paridad de los puntos en el plano cartesiano: (par,par),(par,impar),(impar,par),(impar,impar). Si tengo 5 puntos entonces alguno debe repetir su paridad. Veamos que si se repite un punto cualquiera, si uno de los valores de sus coordenadas es par, entonces al sumarlos se tendrá algo divisible por dos: $2k + 2n = 2(k + n) = 0(mod 2)$ con $2k$ y $2n$ valores de la misma coordenada para el par de puntos que se repite. Por otro lado si tomamos coordenadas de valores impares: $(2k + 1) + (2n + 1) = 2(k + n + 1) = 0(mod 2)$. Sigue que el punto medio de cualquier par de valores que se repite es entero, pues para repeticiones de pares o impares el punto medio es divisible por 2.

- b) Demuestre que en una fiesta de al menos dos personas hay al menos dos personas con la misma cantidad de conocidos. Dado que todas las personas conocen al menos a otra persona (y no, no puede ser su propio amigo).

Sol: Sea n la cantidad de personas en la fiesta, entonces cada persona puede conocer desde 1 hasta $n - 1$ personas, como hay n personas entonces por principio del palomar al menos uno de estos valores se repite.

- c) Demuestre que entre $n + 1$ números se pueden encontrar 2 números tal que su diferencia sea divisible por n .

Sol: Si dividimos todos los $n + 1$ números por n , entonces su resto puede variar desde 0 hasta $n - 1$, lo que equivale a n posibilidades, como son $n + 1$ números por principio del palomar uno debe repetirse. Sigue que hay dos números $nk + r$ y $nj + r$ donde k, j son naturales y r es natural que corresponde al resto. De esta forma, sin pérdida de generalidad (tomando $k \geq j$) $nk + r - nj - r = n(k - j)$ lo que es divisible por n .

P3. [Biyecciones] Sean n y r enteros positivo. Encuentre la cantidad de soluciones de $x_1 + x_2 + \dots + x_n = r$, con $x_i \geq 0$ entero para $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Sol: Sumemos n a toda la ecuación y hagamos el siguiente cambio de variables:

$$(x_1 + 1) + (x_2 + 1) + \dots + (x_n + 1) = r + n$$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n = r + n; y_i \geq 1$$

Notemos que esto equivale a ubicar $r + n$ bolitas denotadas o y separarlas en conjuntos de al menos una bolita con separadores l.

$$\text{o_o_o_o_o_o_o_o} (r + n \text{ bolitas})$$

Notemos que la cantidad de espacios son $r + n - 1$ pues si pongo un separador al final o al inicio tendría un conjunto de una bolita. Como quiero n conjuntos de bolitas basta ubicar $n - 1$ separadores, pues si pongo un separador tengo dos conjuntos, si pongo dos tengo tres, etc, es decir, el último separador también particiona el conjunto que divide (por ejemplo oolo, ololo). Sigue que la cantidad de formas en que puedo realizar lo anterior equivale a la cantidad de formas de ubicar $n - 1$ separadores en $r + n - 1$ espacios: $\binom{r+n-1}{n-1}$. Notemos ahora que la ecuación $x_1 + x_2 + \dots + x_n = r$ equivale a ubicar r bolitas en n urnas, pues el valor de cada x corresponde a la cantidad indistinguible de bolitas y se tienen n variables en las cuales ubicar los valores.

P4. [Látices] ¿Cuántos caminos hay desde $(0,0)$ a (n,k) en un plano cartesiano moviéndose solo hacia arriba o hacia la derecha?

Sol: // Lamento no tener dibujito

Desde 0 en adelante, debo realizar en total $n + k$ movimientos para llegar al punto pedido. De estos, debo moverme k veces a la derecha, es decir, tengo $\binom{n+k}{k}$ formas de tomar la decisión de moverme a la derecha k veces en el recorrido, como las veces que no me muevo a la derecha debo moverme hacia arriba, esto cuenta todas las formas de llegar al punto. Explicado de otra forma supongamos que enumero los pasos $1, 2, \dots, n + k$, entonces debo tomar k de ellos de cualquier forma y esos corresponden a avanzar a la derecha, el resto corresponde a avanzar hacia arriba. Puedo tomar estos conjuntos de $\binom{n+k}{k}$ maneras distintas.

P5. [Doble conteo] Muestre que ambas expresiones cuentan lo mismo:

$$\text{a) } r \binom{n}{r} = n \binom{n-1}{r-1}$$

Sol: En el lado izquierdo $\binom{n}{r}$ corresponde a la cantidad de formas de elegir un comité de r personas de un total de n personas. La r que multiplica corresponde a las formas de elegir un líder de estos comités. Sigue que este lado corresponde a la cantidad de formas de elegir un comité de r personas con un líder. El lado derecho debe contar lo mismo, en este caso el n corresponde a la elección del líder, mientras que el $\binom{n-1}{r-1}$ corresponde a la cantidad de formas en que puedo elegir el resto del comité.

b) $1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \dots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$

Sol: Cada término del lado izquierdo corresponde a una elección de un comité de i personas con un líder a partir de n personas, como i va de 1 a n esto abarca todos los tamaños posibles de comité, por lo que cuenta la cantidad total de comités de cualquier tamaño que se pueden formar con un líder a partir de n personas. El lado derecho debe contar lo mismo, en este caso el término n nuevamente corresponde a la elección de un líder, mientras que el 2^{n-1} corresponde a la elección del comité, ¿Cómo? Si tomo cada persona del resto del comité con dos estados posibles: 0 si no está en el comité, 1 si está, entonces el total de combinaciones de estados posibles corresponde a la cantidad de formas que puedo formar un comité de cualquier tamaño (notar que si todos están en 0 sigue habiendo una persona, el líder previamente elegido).

c) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

Sol: Necesito un dibujito para esto pero no alcanzo :C La parte derecha cuenta la cantidad de formas de llegar al punto (n, n) en un plano cartesiano solo moviéndome a la derecha o hacia arriba. En el lado izquierdo, notando que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, entonces, como $\binom{n}{k}$ equivale a la cantidad de formas de llegar al punto $(n-k, k)$ y $\binom{n}{n-k}$ a la cantidad de formas de llegar al punto $(k, n-k)$. Cada valor de la sumatoria equivale a la cantidad de formas de llegar a un $(n-k, k)$ y luego la cantidad de formas de, partiendo desde allí, completar el camino que falta para llegar a (n, n) .

Nota: El profe me había pedido que viera probabilidades con combinatoria, pero se me fue hacerlo con la P1 en su momento. Con lo de probabilidades me refiero a dividir la cantidad de casos en que puede ocurrir algo en la cantidad de casos totales.

Cualquier duda a: andruso11@gmail.com