

CC3101 Matemáticas discretas

Profesores: Jorge Perez

Auxiliares/ayudantes: Tomás Martínez - José

D. Muñoz - Andrés Olivares - Ignacio Riego

Fecha: Martes 18 de Octubre



Auxiliar 5: Cardinalidad y lógica proposicional

P1. En esta pregunta queremos demostrar que $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$ sin usar inducción.

- Demuestre que todo conjunto finito tiene un orden total. hint: todo conjunto finito es enumerable.
- Encuentre una biyección entre $|\mathcal{P}(A)|$ y los números que se pueden escribir con $n = |A|$ bits.
- Concluya el resultado y entregue un algoritmo que dado un conjunto A imprima todos sus subconjuntos.
- ¿Por qué este algoritmo falla en el caso de un conjunto infinito?

P2. Definimos una función $H : \Sigma \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (donde sigma es un conjunto de strings de largo finito) Como un lenguaje de programación.

Luego definimos una función computable como una que se puede calcular en una cantidad de tiempo finita. El objetivo de esta pregunta es verificar que en un lenguaje de programación no puede producir todas las funciones computables.

Decimos que H produce a f si existe $e \in \Sigma$ tal que $H(e, i) = f(i) \forall i$.

- Demuestre que las funciones computables no son enumerables. hint note que si f es computable $f + 1$ también lo es y luego razone por un argumento diagonal.
- Muestre que el conjunto de partida de H es enumerable.
- Concluya que existe una contradicción entre que H puede producir todas las funciones computables y las partes a) y b).

P3. En esta parte trabajaremos con los strings formados solamente por letras a y b de largo menor o igual a n . Para describirlos definiremos algunas relaciones sobre el conjunto $\{0, 1, \dots, n - 1\}$. La primera es la relación binaria $<$ que es el orden usual en los naturales. Las otras dos son las relaciones unarias A y B tales que $A(i)$ es cierto si en la posición i del string hay una a y $B(i)$ es cierto en el caso de que haya una b . Vale la pena mencionar que en cada posición del string puede haber solo una letra. Dadas estas definiciones queremos escribir las siguientes usando lógica de primer orden.

- s parte con una a y termina con una b
- todas las letras en s son iguales
- s tiene siempre una a después de cada b
- las a y las b en s están intercaladas y s tiene una cantidad par de letras.

P4. Tenemos un juego de rol en el que los jugadores pueden formar grupos o guilds entre ellos para hacer el juego más entretenido. Este juego tiene muchas reglas muy estrictas y queremos escribirlas en lenguaje proposicional para poder hacer un manual. Asigne nombres a los conjuntos, relaciones y funciones como le parezca conveniente.

- Un jugador puede pertenecer solamente a una guild, pero no necesariamente tiene que pertenecer a una.
- Dos jugadores pueden declararse aliados entre ellos, si alguien es aliado de todos los miembros de su guild se convierte en líder de esta.
- Dos jugadores pueden declararse enemigos entre ellos, dos guilds son enemigas si sus líderes son enemigos o si hay al menos un par de enemigos entre ellas y ningún par de aliados.
- Si todos los miembros de una guild son enemigos de un mismo jugador, se vuelven enemigos de todos sus aliados.