CC3101 Matemáticas discretas
Profesores: Jorge Perez
Auxiliares/ayudantes: Tomás Martínez - José D. Muñoz - Andrés Olivares - Ignacio Riego
Fecha: Martes 18 de Octubre

Auxiliar 4: preparacioń control

P1. Las proposiciones 2-SAT son todas las proposiciones que se pueden expresar en la forma:

$$\bigwedge_{i=1}^{m}(l_i \vee l'_i)$$

donde cada l_i y l'_i corresponden a variables literales o negaciones de estas, formalmente, si P es nuestro conjunto de variables proposiconales:

$$(\forall i < m)\ \ l_i \in P \vee \neg l_i \in P$$

a) Dada una proposición 2SAT φ determine un conjunto Σ tal que $\Sigma \models \{\varphi\}$

b) Utilice el método de resolución proposicional para generar un algoritmo que determine si una fórmula 2SAT dada es satisfacible. Este algoritmo debe tardar un tiempo razonable", que en este contexto quiere decir que no sea exponencial.

P2. Se define la relación $\to$ sobre el conjunto W de todas las páginas web en Internet de la siguiente manera: sean p_1 y p_2 dos páginas web cualquiera en W, diremos que $p1 \to p2$ si en la páagina p1 hay un link a la página p_2.

a) Diga todo lo que pueda acerca de las propiedades de la relación $\to$ sobre W (si es refleja, simétrica, antisimétrica, transitiva, de orden parcial, de equivalencia). Justifique.

b) Se quiere definir la relación $\rightsquigarrow$ sobre W, tal que las páginas p_1 y p_2 cumplen con $p_1 \rightsquigarrow p_2$ si existe una forma de navegar desde p_1 hasta p_2 siguiendo links en páginas intermedias. ¿Cómo se puede definir a partir de $\to$?

c) Se define ahora la relación $\leftrightsquigarrow$ sobre W de la siguiente manera: sean p_1 y p_2 dos páginas cualquiera en W, diremos que $p_1 \leftrightsquigarrow p_2$ si ocurre que $p_1 = p_2$ o que simultáneamente $p_1 \rightsquigarrow p_2$ y $p_2 \rightsquigarrow p_1$. Demuestre que $\leftrightsquigarrow$ es una relación de equivalencia sobre W.

d) Considere el conjunto cuociente $W/\leftrightsquigarrow$ compuesto por las clases de equivalencia de $\leftrightsquigarrow$. Se define la relación $\rightrightarrows$ sobre $W/\leftrightsquigarrow$ de la siguiente manera: sean p y q dos páginas cualquiera sobre W, y $[p]$ y $[q]$ sus respectivas clases de equivalencia, diremos que $[p] \rightrightarrows [q]$ si ocurre que $[p] \cap [q] \neq \phi$ o que existen páginas $p \in [p]$ y $q \in [q]$ tales que $p \rightsquigarrow q$. Demuestre que la relación $\rightrightarrows$ así definida es una relación de orden parcial sobre $W/\leftrightsquigarrow$.

P3. El siguiente juego se juega con piedras. El juego comienza con las piedras agrupadas en dos montones no necesariamente del mismo tamaño. Una movida del juego consiste en que uno de los jugadores saca todas las piedras de uno de los montones y divide las piedras que quedan en dos montones (no necesariamente del mismo tamaño). Los jugadores se turnan en hacer sus movidas y gana el último que puede hacer una movida válida (el último que es capaz de sacar un montón y dividir el otro). Demuestre que, si uno de los montones iniciales tiene una cantidad par de piedras, entonces el jugador que parte puede ganar sin importar cómo juegue su adversario, o sea que el jugador que parte tiene una estrategia ganadora.