Esfuerzos Principales y Criterios de Falla

- **Esfuerzos principales**

$$\sigma_{n_{max}} = \frac{\sigma_i + \sigma_j}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_i - \sigma_j}{2}\right)^2 + \tau_{ij}^2}$$

$$\tau_{max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_i - \sigma_j}{2}\right)^2 + \tau_{ij}^2}$$

$i, j = x, y$ ó z

$$\tan(2\theta_n) = \frac{2\tau_{ij}}{\sigma_i - \sigma_j}$$

; θ_n: Ángulo para el cual los esf. ppales. son máximos

- **Criterios de Falla**

↳ Factor de Seguridad: $F_{adm} (\sigma) = \frac{F_{max} (\sigma)}{F.S.}$; F_{adm}: Fuerza máxima que debe aplicarse por seguridad

F_{max}: Fza máxima que debe aplicarse para que ocurra falla

↳ Criterio del esf. normal máximo: $\sigma_{adm} \leq \frac{\sigma_0}{F.S.}$; σ_0: Límite de Fluencia

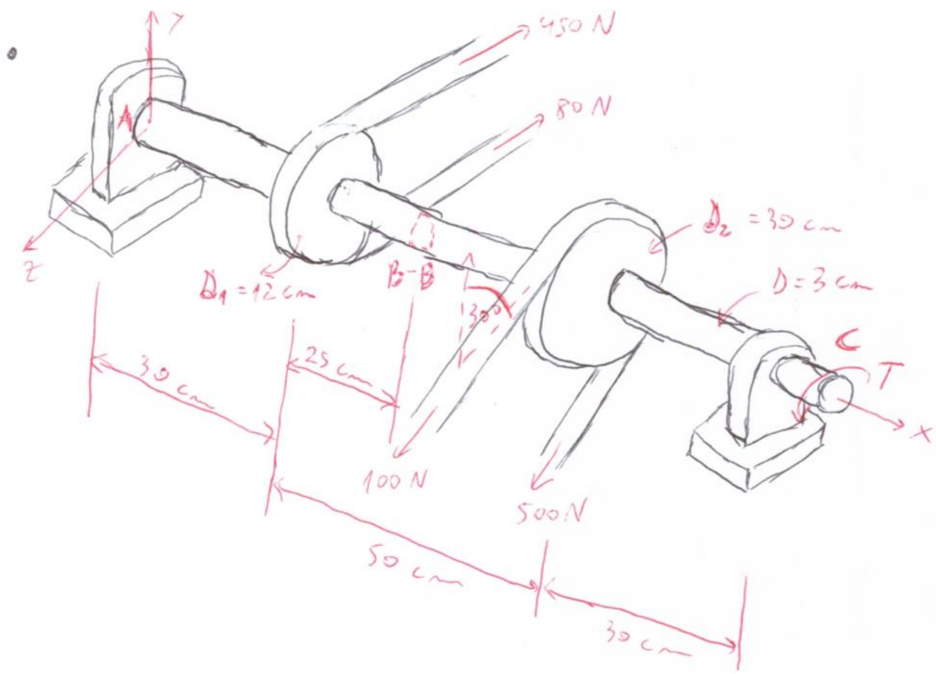
↳ Criterio del esf. de corte máximo (Tresca)

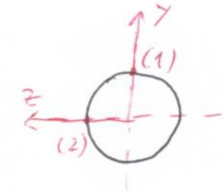
$$\tau_{adm} \leq \frac{\tau_0}{F.S} = \frac{\sigma_0}{2F.S.}$$

↳ Criterio de Von Mises

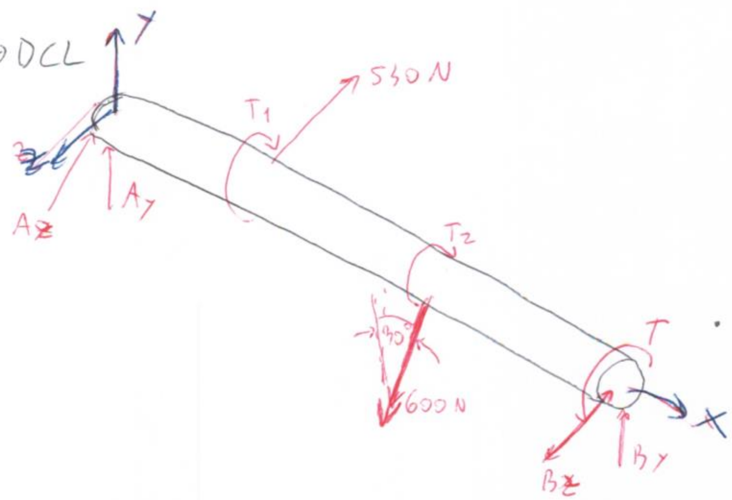
$$\sigma_{VM} \leq \frac{\sigma_0}{F.S} \; ; \; \sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}$$

Esf. ppales





→ DCL



$$T_1 = (450-80)\cdot\frac{0{,}12}{2} = 22{,}2\ N\cdot m$$

$$T_2 = (500-100)\cdot\frac{0{,}3}{2} = 60\ N\cdot m$$

· $\sum T_x = 0 \sim -T_1 - T_2 + T = 0$

$$\boxed{\therefore T = T_1 + T_2 = 82{,}2\ N\cdot m}$$

· $\sum_A M_z = 0 \Rightarrow -600\cdot\cos 30\cdot 0{,}8 + B_y\cdot 1{,}1 = 0 \rightarrow \boxed{B_y = 377{,}9\ N}$

· $\sum F_y = 0 \Rightarrow B_y + A_y - 600\cdot\cos 30 \Rightarrow \boxed{A_y = 141{,}72\ N}$

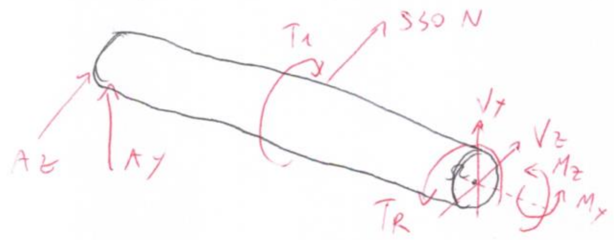
· $\sum_A M_y = 0 \Rightarrow 530\cdot 0{,}3 - 600\cdot \text{sen}30\cdot 0{,}8 + B_z\cdot 1{,}1 = 0$

$$\boxed{B_z = 73{,}64\ N}$$

· $\sum F_z = 0 \Rightarrow -A_z - B_z + 600\cdot\text{sen}30 - 530 = 0$

$$\boxed{A_z = -303{,}64\ N}$$

• Fuerzas y momentos internos en B–B: Corte imaginario:



• $\sum F_y = 0 \rightsquigarrow A_y + V_y = 0 \rightsquigarrow \boxed{V_y = -141{,}72\,N}$

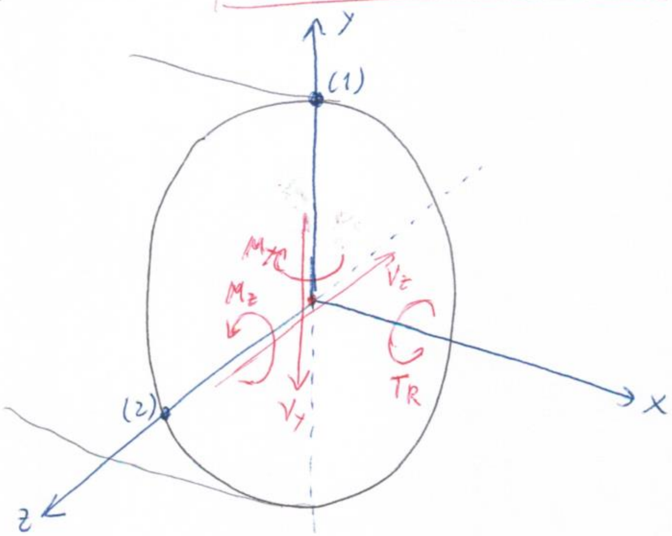
• $\sum F_z = 0 \rightsquigarrow -A_z - 550 - \cancel{V}_z = 0$

$\boxed{V_z = -A_z - 550 = -226{,}36\,N}$

• $\sum_{\Omega} M_y = 0 \rightsquigarrow M_y - 550 \cdot 0{,}25 - A_z \cdot 0{,}55 = 0 \Rightarrow \boxed{M_y = -34{,}5\,N}$

• $\sum_{\Omega} M_z = 0 \rightsquigarrow M_z - A_y \cdot 0{,}55 = 0 \Rightarrow \boxed{M_z = 77{,}95\,N}$

• $\sum T_x = 0 \rightsquigarrow \boxed{T_R = T_1 = 22{,}2\,N \cdot m}$



• Punto (1):

(i): No hay esf. de corte por fza de corte V_y

(ii): Hay esf. de corte τ_{xz} por fza de corte V_z

(iii): No hay esf. axial por flexión M_y

(iv): Hay esf. axial σ_x por flexión M_z

(v): Hay esf. de corte τ_{xz} por torsión T_R

• Punto (2):

(i): Esf. de corte τ_{xy} por fza. de corte V_y

(ii): No hay esf. de corte por fza. de corte V_z

(iii): Esf. axial σ_x por flexión M_y

(iv): No hay esf. axial por flexión M_z

(v): Esf. de corte τ_{xy} por torsión T_R

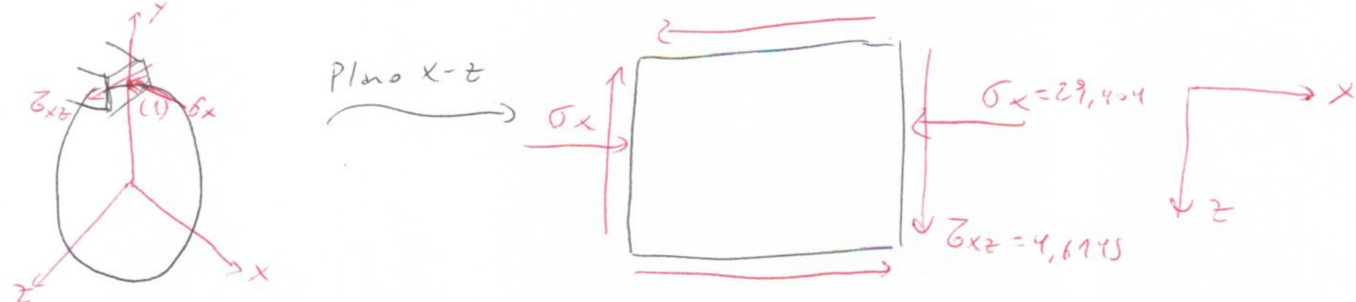
• Cálculo de esfuerzos

$$(1): \cdot \tau_{xz} = \frac{V_z}{It} \cdot \int_0^{D/2} \xi \, dA = \frac{226,364}{\left(\frac{\pi D^4}{64}\right) D} \cdot \frac{2}{3}\left(\frac{D}{2}\right)^3 = 0,42699 \text{ MPa}$$

$$\cdot \sigma_x = \frac{M_z}{I} y = \frac{-77,942 \cdot D/2}{\left(\frac{\pi D^4}{64}\right)} = -29,404 \text{ MPa}$$

$$\cdot \tau_{xz} = \frac{T_R \cdot (D/2)}{J} = \frac{T_R \, (D/2)}{\left(\frac{\pi D^4}{32}\right)} = 4,1875 \text{ MPa}$$

$$\therefore \boxed{\begin{array}{l} \sigma_{xT} = -29,404 \text{ MPa} \\ \tau_{xzT} = 4,6145 \text{ MPa} \end{array}}$$



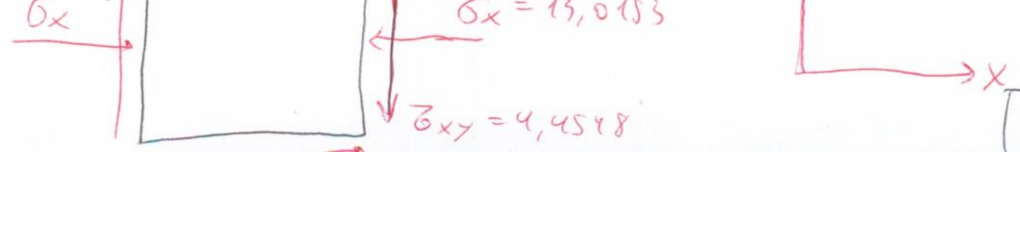
$$(2): \cdot \tau_{x\cancel{z}} = \frac{V_y}{It} \int_0^{D/2} \xi \, dA = -0,2673 \text{ MPa}$$

$$\cdot \sigma_x = \frac{M_{\cancel{z}}}{I} y = -\frac{34,5}{\left(\frac{\pi D^4}{64}\right)} \cdot \frac{D}{2} = -13,0153 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{xT} = -13,0153 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\cancel{x}zT} = -4,4548 \text{ MPa}$$

$$\cdot \tau_{x\cancel{z}} = \frac{T_R \cdot r}{J} = -4,1875 \text{ MPa}$$



3

• Cálculo de esf. principales y de Von Mises:

$$\sigma_{m,n} = \frac{\sigma_i + \sigma_j}{2} \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{\sigma_i - \sigma_j}{2}\right)^2 + \tau_{ij}^2}}_{\tau_{max}} \qquad i,j = x, y \text{ ó } z$$

$$(1) \quad \sigma_{m,n} = -\frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \cancel{\frac{-13,0153}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{13,0153}{2}\right)^2 +}}$$

$$= \frac{-29,404}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-29,404}{2}\right)^2 + 4,6149^2}$$

$$= -14,702 \pm 15,409 \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \sigma_m &= -30,11 \text{ MPa} \\ \sigma_n &= 0,707 \text{ MPa} \\ \tau_{max} &= \pm 15,409 \text{ MPa} \end{aligned}}$$

$$\therefore \sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_m^2 + \sigma_n^2 - \sigma_m \cdot \sigma_n}$$

$$= \sqrt{(-30,11)^2 + 0,707^2 + 30,11 \cdot 0,707}$$

$$\sigma_{VM} = 30,47 \text{ MPa} = \frac{\sigma_0}{F.S} \Rightarrow \boxed{F.S = 3,282}$$

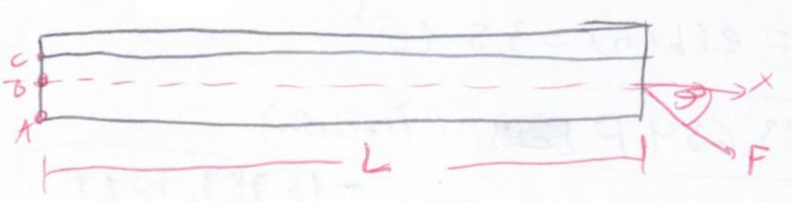
$$(2) \quad \sigma_{m,n} = \frac{(-13,0153)}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{13,0153}{2}\right)^2 + (-4,4548)^2}$$

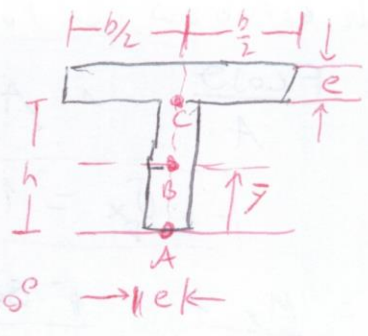
$$= -6,508 \pm 7,886 \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \sigma_m &= -14,394 \text{ MPa} \\ \sigma_n &= 1,378 \text{ MPa} \\ \tau_{max} &= \pm 7,886 \text{ MPa} \end{aligned}}$$

$$\therefore \sigma_{VM} = \sqrt{(-14,394)^2 + (1,378)^2 + 14,394 \cdot 1,378}$$

$$\sigma_{VM} = 15,13 = \frac{\sigma_0}{F.S} \Rightarrow \boxed{F.S = 6,609}$$

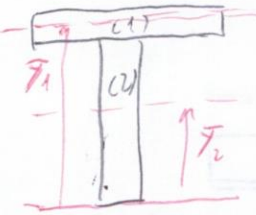
P2] :





$L = 2\,m;\ h = 20\,cm;\ b = 15\,cm;\ e = 1\,cm;\ \theta = 50°$

• Calculando $\bar{y}$ e $\bar{I}_z$



$$\rightarrow I_1 = \frac{b\cdot e^3}{12} = \frac{0{,}15\cdot 0{,}01^3}{12} = 1{,}25\cdot 10^{-8}\,[m^4]$$

$$\cancel{\frac{b(h+e)^3}{12} = \frac{0{,}15(0{,}2+0{,}01)^3}{12} = 1{,}158\cdot 10^{-4}\,[m^4]}$$

$$\rightarrow I_2 = \frac{e h^3}{12} = \frac{0{,}01\cdot 0{,}2^3}{12} = 6{,}667\cdot 10^{-6}\,[m^4]$$

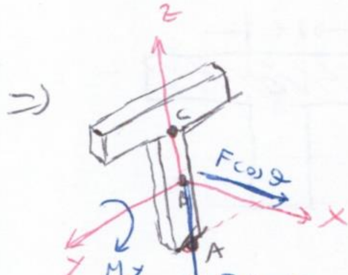
Desde la base!

$$\rightarrow \bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i\cdot A_i}{\sum A_i} = \frac{(h+\frac{e}{2})\cdot(e\cdot b) + \frac{h}{2}\cdot(e\cdot h)}{e\cdot b + e\cdot h} = 0{,}145\,[m]$$

$$\rightarrow \bar{I}_z = \underbrace{\left[I_1 + (\bar{y}_1-\bar{y})^2(e\cdot b)\right]}_{\bar{I}_1} + \underbrace{\left[I_2 + (\bar{y}-\bar{y}_2)^2(e\cdot h)\right]}_{\bar{I}_2} = 1{,}614\cdot 10^{-5}\,[m^4]$$

• Veamos el estado de esfuerzos en la zona empotrada:

⇒



(A): • Esf. de tracción por Fza. axial de Fcos θ
• Esf. de compresión por momento flector My = Fcos θ · L
• No hay esf. de corte por Fza. de corte F·sen θ

(B): • Esf. de tracción por Fza. axial Fcos θ
• Esf. de corte por Fza. de corte F·sen θ
• No hay esf. normal por momento flector My

(C): • Esf. de tracción por Fza. axial Fcos θ
• Esf. de ~~compresión~~ tracción por momento flector My
• Esf. de corte por Fza. de corte F·sen θ

- Cálculo de esfuerzos (en función de F)

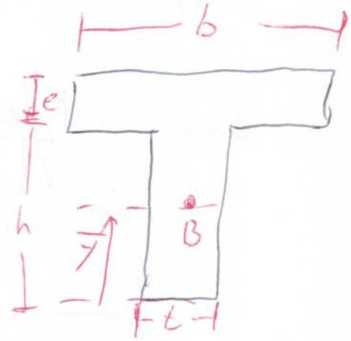
(A): $\underset{(\text{Fza axial})}{\sigma_x} = \frac{F\cos\theta}{A} \wedge A = e(b+h) = 3{,}5\cdot 10^{-3}\,[m]$

$$\boxed{\therefore \sigma_x = 183{,}654F}$$

$$\underset{(\text{Momento } M_y)}{\sigma_x} = \frac{M_y\cdot y}{I_z} = \frac{F\,\text{sen}\,\theta\cdot L\cdot\bar{y}}{I_z} \rightsquigarrow \boxed{\sigma_x = -13773{,}507F}$$

$$\boxed{\therefore \sigma_{x_{Total}} = -13589{,}853F}$$

(B) $\underset{(\text{Fza. axial})}{\sigma_x} = \frac{F\cos\theta}{A} = 183{,}654F$



$$\tau_{xy} = \frac{V(x)}{I_z t}\int_y^c \xi\, dA \qquad // \qquad V = -F\,\text{sen}\,\theta,\quad t = e,\quad y = 0,\quad c = h+e-\bar{y}$$

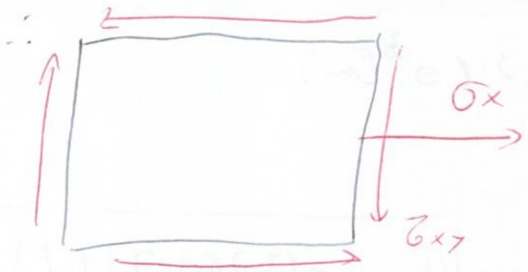
$$dA = \begin{cases} e\,d\xi & -\bar{y} < \xi < h-\bar{y} \\ b\,d\xi & h-\bar{y} < \xi < h+e-\bar{y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_y^c \xi\, dA = \int_0^{h-\bar{y}} e\xi\, d\xi + \int_{h-\bar{y}}^{h+e-\bar{y}} b\xi\, d\xi =$$

$$= \frac{e}{2}(h-\bar{y})^2 + \frac{b}{2}\left((h+e-\bar{y})^2 - (h-\bar{y})^2\right)$$

$$\therefore \tau_{xy} = \frac{-F\,\text{sen}\,\theta}{2I_z e}\left(e(h-\bar{y})^2 + b\left((h+e-\bar{y})^2 - (h-\bar{y})^2\right)\right)$$

$$\boxed{\tau_{xy} = -499{,}2896F}$$



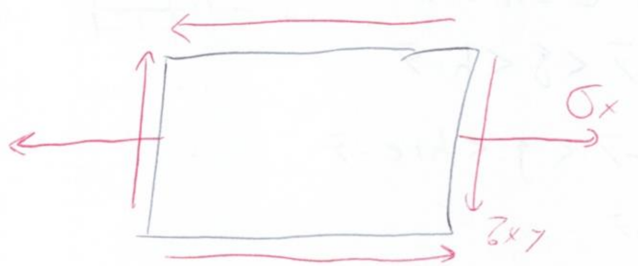
$\sigma_x = 183{,}654F$

$\tau_{xy} = 499{,}2896F$

(C) $\sigma_x = 183{,}654F$ (F_{z} axial)

$\underset{(M_y)}{\sigma_x} = \dfrac{F \cdot \operatorname{sen}\theta L}{I_z} \cdot \underbrace{(h - \bar{y})}_{y} = 5224{,}43F$

$\tau_{xy} = -\dfrac{F \operatorname{sen}\theta}{I_z \cdot e} \displaystyle\int_{h-\bar{y}}^{h+e-\bar{y}} \xi \cdot b \, d\xi \Rightarrow \tau_{xy} = -427{,}4536F$



$\sigma_x = 5408{,}088F$

$\tau_{xy} = {}^{*}427{,}4536F$

- Calculando esf. principales: $\sigma_n = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

$\tau_m = \mp \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

(A) $\sigma_x = -13589{,}853F \Rightarrow \sigma_1 = -13584{,}853F$

$\sigma_2 = 0$

(B) $\left.\begin{array}{l} \sigma_x = 183{,}654F \\ \tau_{xy} = -499{,}2896F \end{array}\right\} \begin{array}{l} \sigma_1 = 599{,}49F \\ \sigma_2 = -415{,}836F \end{array}$

(c) $\sigma_x = 5408,088\,F$ $\quad$ $\sigma_1 = 5441,665\,F$

$\tau_{xy} = 427,4536\,F$ $\quad$ $\sigma_2 = -33,5773\,F$

• Aplicando Von Mises $\left(\sigma_{Adm} = \frac{\sigma_2}{F.S.} \right) \wedge \left(\sigma_{Adm} = \sigma_{VM} \right)$

(A): $\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1 \cdot \sigma_2} = 13589,853\,F = \frac{340 \cdot 10^6}{2,5}$

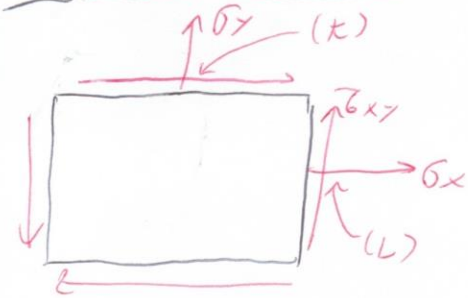
$\boxed{\therefore F_A = 10007,467\,N}$

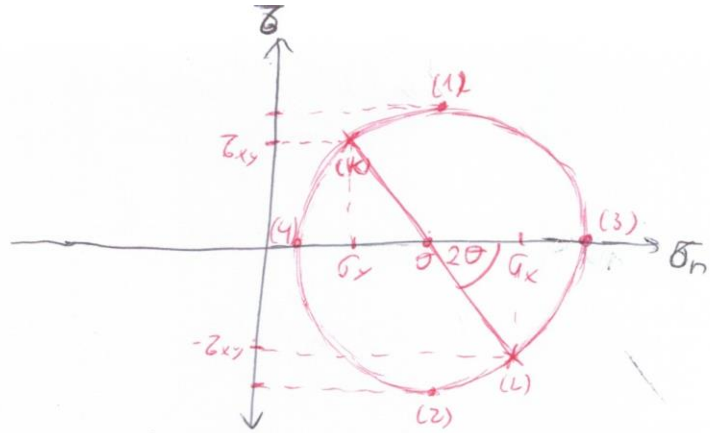
(B): $\sigma_{VM} = 884,07995\,F = \frac{340 \cdot 10^6}{F.S} \Rightarrow \boxed{F_B = 153832,24\,N}$

(C): $\sigma_{VM} = 5458,53\,F = \frac{340 \cdot 10^6}{F.S} \Rightarrow \boxed{F_C = 24915,128\,N}$

$\therefore$ La carga máxima aplicable es $F_A = 10007,467\,N$

P3) Círculo de Mohr





* Si τ_{xy} gira cuadrado dif. en el sentido de las manecillas del reloj => $\tau_{xy} > 0$

(1), (2): Esfuerzos de corte máximo y mínimo
(3), (4): Esfuerzos normales máximo y mínimo
θ: Ángulo que debe rotar el cuadrado diferencial para lograr los esf. normales

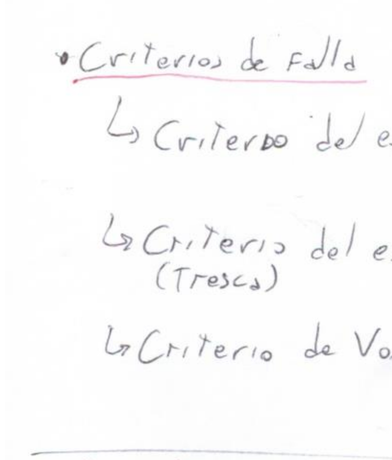
- Criterios de Falla

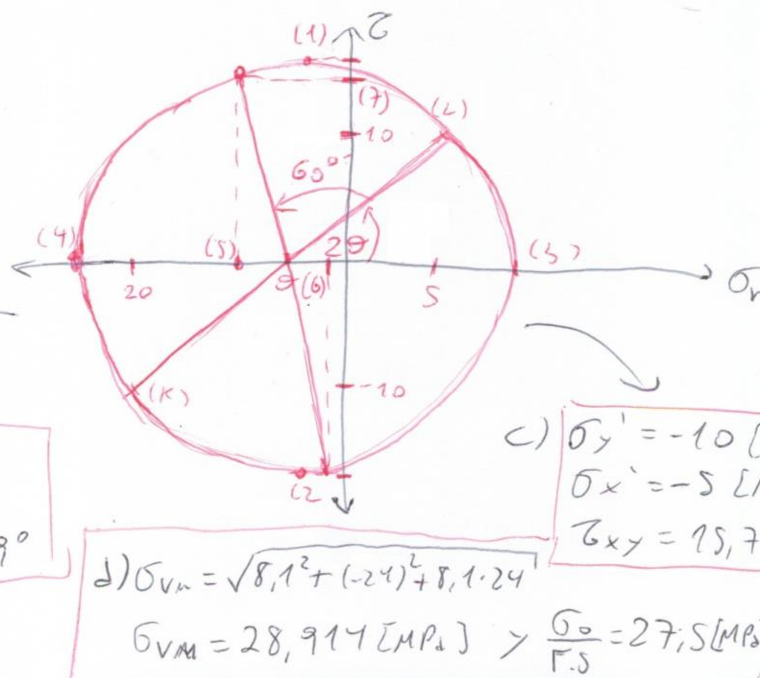
↳ Criterio del esfuerzo normal máximo: $\sigma_{adm} \leq \frac{\sigma_0}{F.S.} \wedge \sigma_0 = \sigma_y$

↳ Criterio del esfuerzo de corte máximo (Tresca): $\tau_{adm} \leq \frac{\tau_0}{F.S.}$ y $\tau_0 = \frac{\sigma_y}{2}$

↳ Criterio de Von Mises: $\sigma_{VM} \leq \frac{\sigma_0}{F.S} \wedge \sigma_{VM} \equiv \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}$
$\sigma_0 = \sigma_y$

a)





$\sigma_1 = 8{,}1$ [MPa]
$\sigma_2 = -24$ [MPa]
$2\theta = 38° \Rightarrow \theta = 19°$

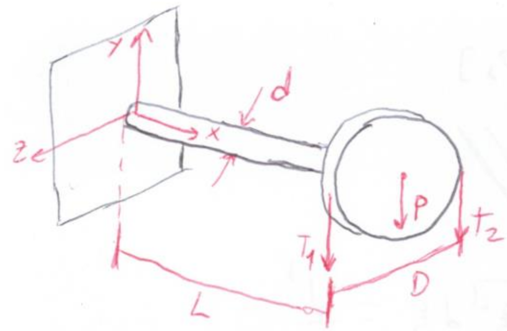
b) $\tau = 16{,}1$ [MPa]

c) $\sigma_y' = -10$ [MPa]
$\sigma_x' = -5$ [MPa]
$\tau_{xy} = 15{,}7$ [MPa]

d) $\sigma_{VM} = \sqrt{8{,}1^2 + (-24)^2 + 8{,}1 \cdot 24}$
$\sigma_{VM} = 28{,}914$ [MPa] $> \frac{\sigma_0}{F.S} = 27{,}5$ [MPa]

∴ Se produce falla
$\sigma_{VM} > \frac{\sigma_0}{}$

P3



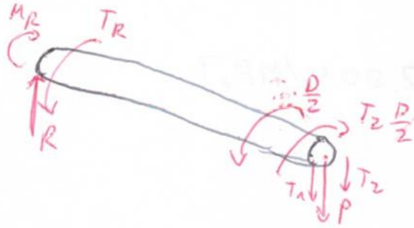
* Propiedades de área

$\hookrightarrow A = \frac{\pi d^2}{4} = 2{,}827 \cdot 10^{-3}\ m^2$

$\hookrightarrow I = \frac{\pi d^4}{64} = 6{,}362 \cdot 10^{-7}\ m^4$

$\hookrightarrow J = \frac{\pi d^4}{32} = 1{,}272 \cdot 10^{-6}\ m^4$

a) DCL

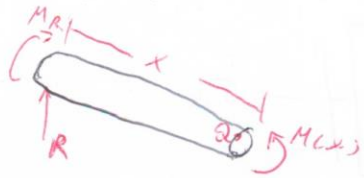


$$R = T_1 + T_2 + P = 4250\ N$$

$$T_R = (T_1 - T_2)\frac{D}{2} = 250\ N\cdot m$$

$$M_R = -(T_1 + T_2 + P)L = -1275\ Nm$$

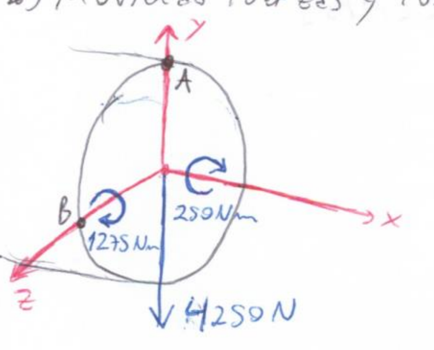
$\rightarrow$ Sólo $M(x)$ cambia con la distancia x



$$M(x) = M_R + x \cdot R = -R \cdot L + xR \implies \boxed{M(x) = R(x - L)}$$

$\rightsquigarrow$ M es máximo cuando $x = 0$, es decir, en el empotramiento //

b) Moviendo fuerzas y torques al empotramiento



* Esfuerzos en (A):
- Esfuerzo de corte τ_{xz} por torsión de 250 N·m
- Esfuerzo de tracción σ_x por flexión por Momento de 1275 N·m

* Esfuerzos en (B):
- Esfuerzo de corte τ_{xy} por fuerza de corte de 4250 N
- Esfuerzo de corte τ_{xy} por torsión de 250 N·m

c) • Punto (A)

$\rightsquigarrow$ Torsión de 250 N·m : $\tau_{xz} = \frac{T\left(\frac{d}{2}\right)}{J} = \frac{250[N\,m] \cdot 0{,}03[m]}{1{,}272 \cdot 10^{-6}[m^4]} = 5{,}896\ [MPa]$

$\rightsquigarrow$ Tracción por flexión de 1275 N·m : $\sigma_x = -\frac{M}{I}y = \frac{1275[N\cdot m] \cdot 0{,}03[m]}{6{,}362 \cdot 10^{-7}[m^4]} = 60{,}123\ [MPa]$

• Punto (B)

⇝ Torsión de 250 Nm : $\tau_{xy} = 5,896\ [MPa]$

⇝ Corte por fuerza de 4250 N : $\tau_{xy} = \dfrac{V}{It}\displaystyle\int_{y}^{c} \xi\, dA$ //

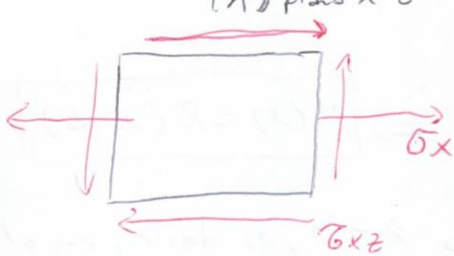
$$* \text{ Desde ej. (1)}: \int_{y}^{c} \xi\, dA = 2\int_{0}^{d/2} \xi \sqrt{\frac{d^2}{4} - \xi^2}\, d\xi = \frac{d^3}{12}$$

$$\cdot\ y = 0,\ c = \frac{d}{2},\ t = d$$

$$\Rightarrow \tau_{xy} = \frac{-4250\,N}{6,362\cdot 10^{-7}\,m^4 \cdot 0,06\,m} \cdot \frac{(0,06)^3\,m^3}{12} = -2,004\ [MPa]$$

• Estados de esfuerzo:

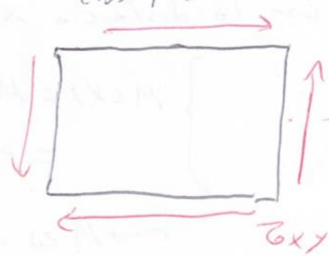
(A) plano x-z



$\sigma_x = 60,123\ [MPa]$

$\tau_{xz} = 5,896\ [MPa]$

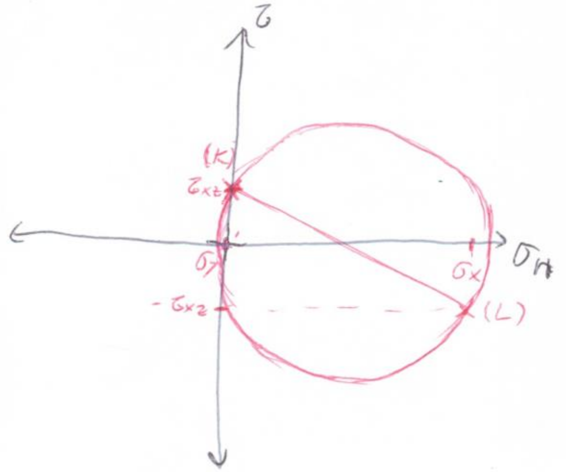
(B) plano x-y



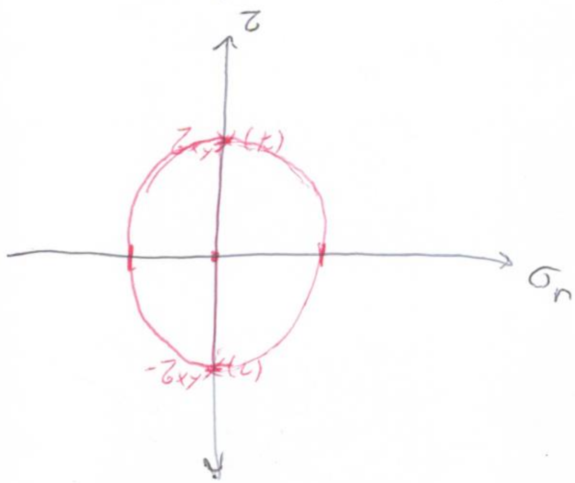
$\sigma_x = 0$

$\tau_{xy} = 3,892\ [MPa]$

d) (A): (K) $\Rightarrow \sigma_z = 0$
$\tau_{xz} = 5{,}896$ || (L) $\Rightarrow \sigma_x = 60{,}125$
$\tau_{xz} = -5{,}896$



$$\boxed{\begin{array}{l} \sigma_{max} = 62 \text{ MPa } (\sigma_1) \\ \sigma_{min} = -1 \text{ MPa } (\sigma_2) \end{array}}$$ (A)



(B): (K) $\Rightarrow \sigma_y = 0$
$\tau_{xy} = 3{,}592$

(L) $\Rightarrow \sigma_x = 0$
$\tau_{xy} = -3{,}592$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sigma_{max} = 3{,}592 \text{ [MPa] } (\sigma_1) \\ \sigma_{min} = -3{,}592 \text{ [MPa] } (\sigma_2) \end{array}}$$ (B)

e) (A) $\rightsquigarrow \sigma_{VM} = \sqrt{62^2 + (-1)^2 - 62\cdot(-1)} = 62{,}5 \text{ [MPa]}$

$\frac{\sigma_0}{F.S} = 136 \text{ [MPa]}$ $\Rightarrow$ Dado que $\sigma_{VM} < \frac{\sigma_0}{F.S}$, el material no falla

(B) $\rightsquigarrow \sigma_{VM} = \sqrt{(3{,}592)^2 + (-3{,}592)^2 - 3{,}592\cdot(-3{,}592)} = 6{,}23 \text{ [MPa]}$

$\Rightarrow$ Dado que $\sigma_{VM} < \frac{\sigma_0}{F.S}$, el material no falla //