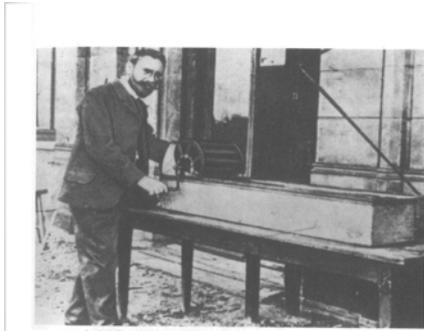
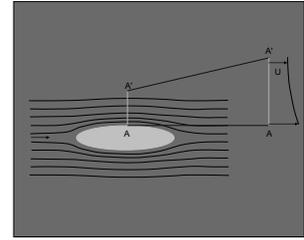


Capa Límite



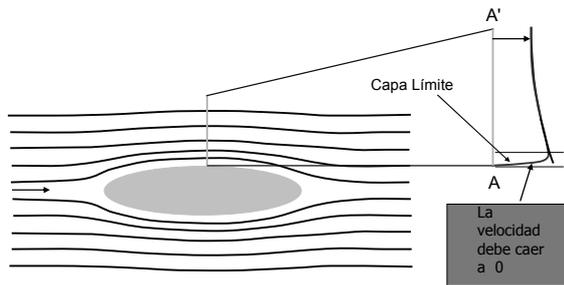
Ludwig Prandtl with his water tunnel

- Las soluciones que brinda el flujo potencial tienen asociada una condición de deslizamiento en la pared
- Las soluciones del flujo potencial son aproximadas a altos números de Reynolds pero dejan de ser válidas en capas cercanas a las paredes de los cuerpos debido a la adherencia del flujo a la pared

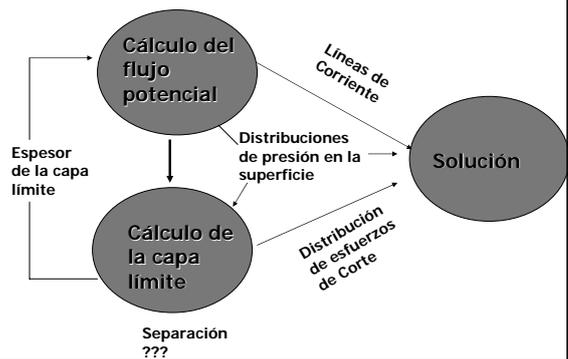


La capa límite es una capa de fluido cercana a la pared donde los efectos viscosos no pueden ser despreciados.

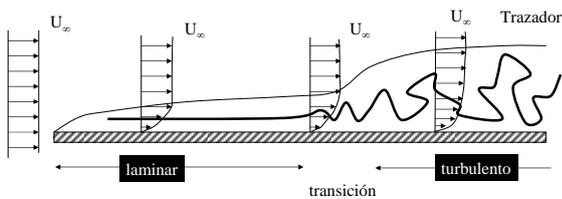
La capa límite es la región donde se efectúa la transición entre las velocidades del flujo libre y aquellas de la pared.



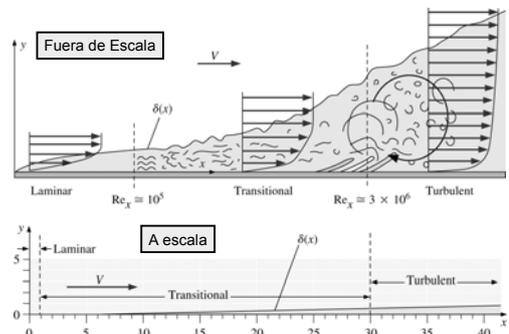
Esquema de cálculo



Capa Límite en una placa plana



Capa Límite



Transición en la capa límite

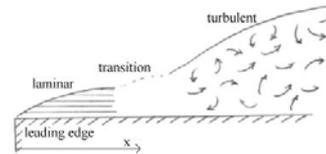
- La transición de régimen laminar a régimen turbulento en el flujo dentro de la capa límite depende del número de Reynolds definido como

$$Re_x = \frac{\rho U x}{\mu}$$

donde: ρ = densidad del fluido,
 U = velocidad de la corriente libre,
 x = distancia al borde de ataque,
 μ = viscosidad dinámica.

- Zona de Transición comienza $Re_x \sim 10^5$
- La capa límite comienza a ser turbulenta para $Re_x \sim 3 \cdot 10^5$

Capas límites



Video

Laminar

- Movimiento Uniforme y Regular.

Turbulento

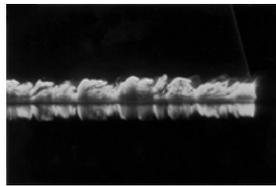
- Movimiento irregular y no estacionario
- Mezclado importante entre las distintas capas.

Perfiles de Velocidad en la capa límite



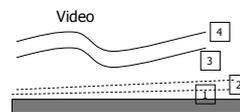
$$\delta_{lam} \approx 10^{-2} - 10^{-1} mm$$

$$\delta_{urb} \approx 10 - 30 mm$$



La capa límite turbulenta llega a la superficie!

Estructura de la Capa límite Turbulenta



	Capa Interna ~2-6mm		Capa externa ~8-25mm	
	1-Subcapa viscosa	2-Región Logarítmica	3-Region externa	4-Supercapa viscosa
Flujo	Intermitente turbulento	Turbulento c/ fuertes fluc. veloc	Turbulento c/ fluct moderadas perturb por la intermit.	Con algunas caracterist. laminares
Espesor	$0 < y < \frac{40\nu}{u^*}$	$\frac{40\nu}{u^*} < y < 0.2\delta$	$0.2\delta < y < \delta$	$y > 0.4\delta$
Tensiones de Re vs Tensiones viscosas	Tensiones viscosas predominantes	Tensiones Reynolds predominantes	Tensiones Reynolds predominantes	Tensiones Reynolds predominantes

$$u^* = \text{veloc. frotam} = \sqrt{\frac{\sigma_{xy}|_{pared}}{\rho}} = \sqrt{\frac{\sigma_{xy}'}{\rho}} = \sqrt{(u'v')}$$

Resistencia al avance del cuerpo

Arrastre de Superficie:

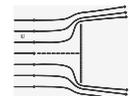
- Fuerzas de fricción causadas por el cisallamiento entre la superficie y el fluido
- Son función de Area superf. y largo del objeto



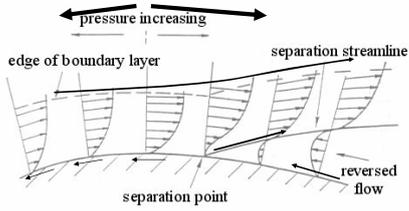
Arrastre de forma

- Fuerzas causadas por las diferencias de presión en el cuerpo.
- Dependen del contorneo y pegado de la capa límite al cuerpo
- Son función del Area Normal al flujo

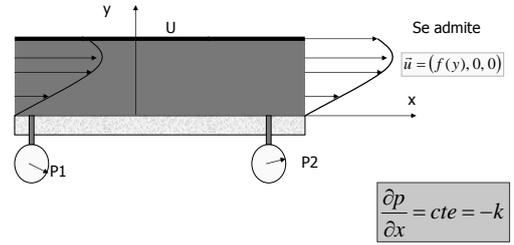
Video
Video



Separación de la capa límite

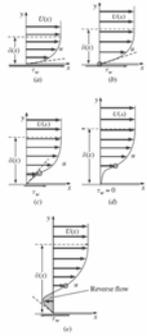


Flujo de Couette Poiseuille



$$u(y) = \frac{-k}{2\mu} h^2 \left[1 - \frac{y}{h} \right] \frac{y}{h} + U \frac{y}{h}$$

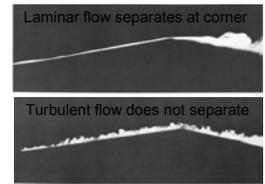
Gradientes de Presión



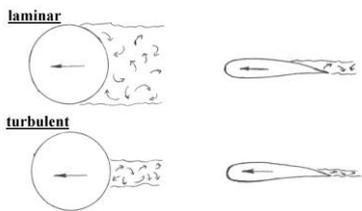
- La forma de la capa límite es fuertemente influenciada por los gradientes de presión externos
 - favorable ($dP/dx < 0$)
 - cero
 - Moderadamente adversos ($dP/dx > 0$)
 - Gradiente crítico adverso ($\tau_w = 0$)
 - Fuertemente adverso (flujo separado)

Gradientes de presión

- La aproximación de la capa límite deja de ser válida luego del punto de separación debido al flujo inverso.
- La capa límite turbulenta es más resistente a los gradientes adversos de presión



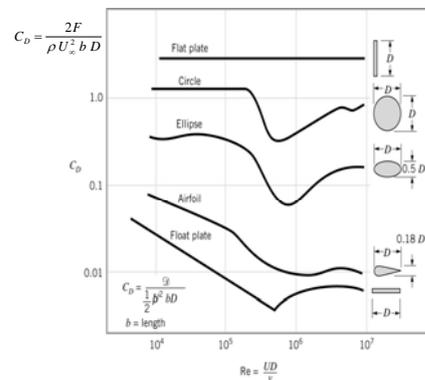
Separación de la capa límite laminar o turbulenta



Video
Video

Video 15°
Video 20°

Video



Video
video

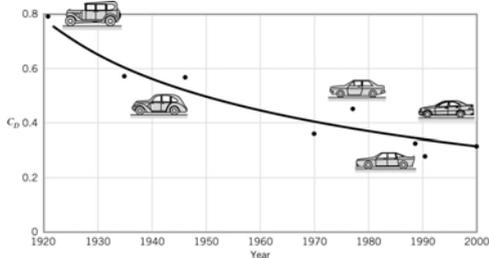
$$C_d = \frac{2 \text{Drag}}{\rho U^2 A}$$

$$\text{Drag} = \frac{C_d \rho U^2 A}{2}$$

■ Ford Explorer 2002 $C_d = 0.41$

Video

Video



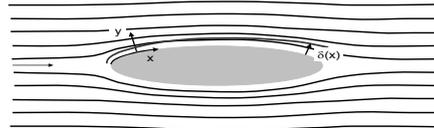
Coordenadas de la Capa Límite

Llamamos x a la coordenada de la capa límite en la dirección del flujo, e y a la coordenada de la capa límite en la dirección normal. Si el espesor de la capa límite $\delta(x)$ es muy delgado frente al radio de curvatura R de la pared

$$\delta(x) \ll R$$

N S en coordenadas capa límite \sim N S en coordenadas cartesianas

La capa límite se desarrolla como si la pared fuese plana



2D NAVIER-STOKES y Ecuación de Cons. De la Masa

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Ordenes de Magnitud de la capa límite

Vamos analizar los ordenes de magnitud de los distintos términos de las ecuaciones con los siguientes considerandos

Llamando L a la escala longitudinal y δ a la escala transversal

$$\delta \ll L$$

$$\frac{\partial(\quad)}{\partial x} \approx \frac{(\quad)}{L}$$

$$\frac{\partial(\quad)}{\partial y} \approx \frac{(\quad)}{\delta}$$

En cuanto a la velocidad siendo U la velocidad del flujo libre

$$\frac{\partial u}{\partial(\quad)} \approx \frac{U}{(\quad)}$$

Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{U}{L}$$

$$v \sim \frac{\delta}{L} U$$

$$\frac{\delta}{L} \ll 1 \Rightarrow v \rightarrow 0$$

Video

$$\tau_{dif} = \frac{\delta^2}{\nu} \Rightarrow \frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{\nu}{Ux}} = \frac{1}{\sqrt{Re_x}}$$

$$\tau_{conv} = \frac{x}{U}$$

$$v \sim \frac{\delta}{L} U \approx \sqrt{\frac{\nu}{UL}} U = \sqrt{\frac{\nu U}{L}}$$

Ec. de cons de la cant de movim. en la dir. normal

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{UV}{L}, \frac{V^2}{\delta}, \frac{U^2}{\delta}, v \frac{V}{L^2}, v \frac{V}{\delta^2}$$

Como $V \sim (\delta/L)U$ y multiplicando todos los términos por (δ/U^2) , se obtiene

$$\left(\frac{\delta}{L}\right)^2, \left(\frac{\delta}{L}\right)^2, 1, \frac{1}{Re} \left(\frac{\delta}{L}\right)^2, \frac{1}{Re}$$

Como $(\delta/L) \sim (Re)^{-1/2}$

$$\frac{1}{Re}, \frac{1}{Re}, 1, \frac{1}{Re^2}, \frac{1}{Re}$$

$Re \gg 1$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$

Indica que la presión es constante según la coordenada "y" dentro de la capa límite

Sea $p_{pd}(x,y)$ la presión obtenida a partir de la solución de flujo potencial. Surge entonces que $p_d(x)$ puede ser obtenida a partir de $p_{pd}(x,0)$:

$p_d(x) = p_{pd}(x,0) \equiv p_{pdb}(x)$

El flujo externo a la capa límite deja su impronta en la capa límite a través de la presión.

APROXIMACION DE NS DE LA CAPA LIMITE

Las ecuaciones de la capa límite son entonces:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp_{pdb}}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$\frac{1}{\rho} \frac{dp_{pdb}}{dx} = U \frac{dU}{dx}$

donde $p_{pdp}(x)$ es conocida y surge de considerar el escorrimento potencial

Las condiciones de borde son

$$u|_{y=0} = 0, \quad v|_{y=0} = 0$$

Adicionalmente u debe aproximarse al valor de la velocidad del flujo potencial U si y crece y se acerca a la capa límite.

Solución de Blasius

- Blasius considera el caso de una placa plana y el flujo externo a considerar es en ese caso

$$U = cte \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

- La solución a la que llega es una solución numérica sin expresión analítica en función de una variable adimensional

$$\eta = y \left(\frac{U_\infty}{2\nu x} \right)^{1/2}$$

- La capa límite crece con: $\delta \propto \sqrt{x}$
- El crecimiento inicial es rápido
- El crecimiento de la capa límite $d\delta/dx \propto 1/\sqrt{x}$, decrece hacia aguas abajo

- Las tensiones en la pared: $\tau_w \propto 1/\sqrt{x}$
- A medida que aumenta el espesor de la capa límite, la tensión de corte disminuye porque disminuye el gradiente de velocidades.

Capa límite en una placa plana

Es el esfuerzo de corte en la pared

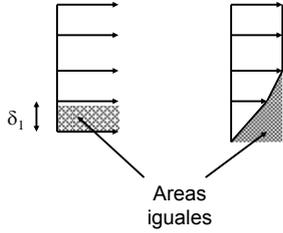
es máximo en el borde de ataque

Flujos y Cantidad de Movimiento para un volumen de control rectangular

Sección	Flujos	Cant Mov s/x
	$\sum \text{flujos} = 0$	$\sum \text{Flujos e de mov} = \text{Arrastre}$
(1)	$b \int_0^{\delta} U dy$	$\rho b \int_0^{\delta} U^2 dy$
(2)	$-b \int_0^{\delta} u dy$	$-\rho b \int_0^{\delta} u^2 dy$
(3)	$-b \int_0^{\delta} (U-u) dy$	$-\rho b \int_0^{\delta} U(U-u) dy$
(4)	0	0

Espesor de Desplazamiento

Flujo Inviscido Flujo Viscoso



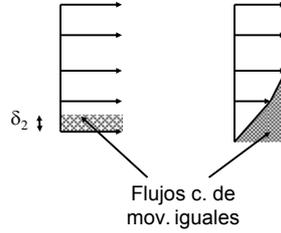
$$\delta_1 b U = \int_0^{\delta_1} (U - u) b dy$$

$$\Rightarrow \delta_1 = \int_0^{\delta_1} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

Areas iguales

Espesor de Cantidad de Movimiento

Flujo Inviscido Flujo Viscoso

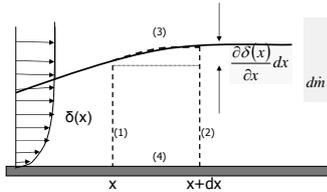


$$\rho \delta_2 b U^2 = \rho \int_0^{\delta_2} u(U - u) b dy$$

$$\Rightarrow \delta_2 = \int_0^{\delta_2} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

Flujos c. de mov. iguales

Métodos Integrales de la capa límite



$$F_{1x} = p \delta(x)$$

$$F_{2x} = F_{1x} + \frac{\partial F_{1x}}{\partial x} dx$$

$$F_{3x} = p \frac{\partial \delta(x)}{\partial x} dx$$

$$F_{4x} = -\tau_0 dx$$

$$d\dot{m} = \dot{m}_{x+dx} - \dot{m}_x = \frac{d\dot{m}}{dx} dx = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{\delta(x)} \rho u dx \right) dx$$

$$M_{F1x} = \rho \int_0^{\delta(x)} u^2 dy$$

$$M_{F2x} = M_{F1x} + \frac{\partial M_{F1x}}{\partial x} dx$$

$$M_{F3x} = d\dot{m} U = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{\delta(x)} \rho u^2 dy \right) dx U$$

- Considerando que

$$\sum_i M_{F1x} = \sum_i F_{ix}$$

- Y la expresión de espesor de cant. de desplazamiento y de cantidad de movimiento

$$\delta_1 = \int_0^{\delta_1} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

- Se obtiene la siguiente ecuación diferencial

$$\delta_2 = \int_0^{\delta_2} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{1}{U} \frac{dU}{dx} (2\delta_2 + \delta_1) = \frac{\tau_0}{\rho U^2}$$

Métodos Integrales para capa límite laminar en placa plana

- Hay que suponer una función $u(x,y)$ que cumpla
- Una opción es

$$u(x,0) = 0$$

$$u(x,\delta) = U$$

$$\left. \frac{\partial(u(x,y))}{\partial y} \right|_{y=\delta} = 0$$

$$u = U \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right)$$

$$\delta_1 = \frac{\pi-2}{\pi} \delta$$

$$\delta_2 = \frac{4-\pi}{2\pi} \delta$$

$$\tau_0 = \mu \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0} = \mu \frac{\pi U}{2\delta}$$

$$\frac{4-\pi}{2\pi} \frac{d\delta}{dx} = \frac{\mu}{\rho U^2} \frac{\pi U}{2\delta} \Rightarrow \delta^2 = \frac{2\pi}{4-\pi} \frac{\pi \nu x}{2 U^2} + C$$

$$\delta(0) \Rightarrow C = 0$$

$$\delta = 4.79 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

$$\delta_{Blasius} = 5 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

Métodos Integrales para capa límite Turbulenta en placa plana

- Hay que suponer una función $u(x,y)$ que cumpla
- Una opción es

$$u(x,0) = 0$$

$$u(x,\delta) = U$$

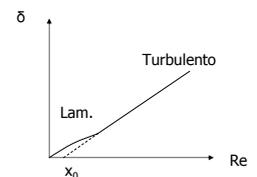
$$\left. \frac{\partial(u(x,y))}{\partial y} \right|_{y=\delta} = 0$$

$$\frac{\bar{u}}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}$$

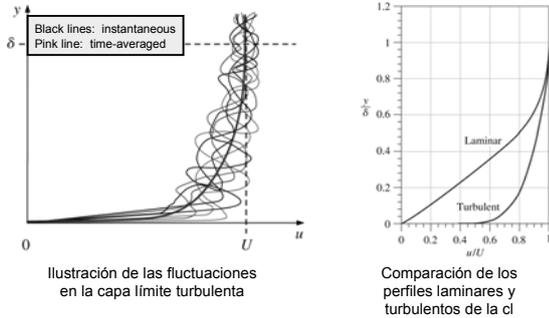
$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} = 0.0225 \left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{1/4}$$

$$\frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho U^2}$$

$$\frac{\delta}{x-x_0} = 0.37 \left(\frac{U\nu}{x-x_0}\right)^{-1/5}$$

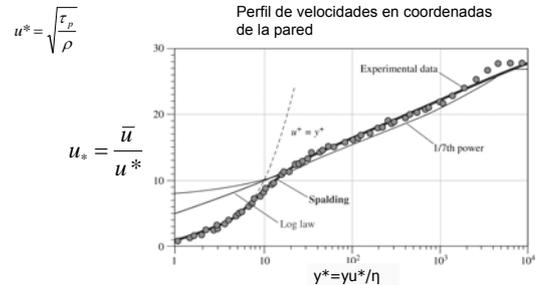


Capa límite turbulenta



Capa Límite Turbulenta

- Ley de la pared en capas límites



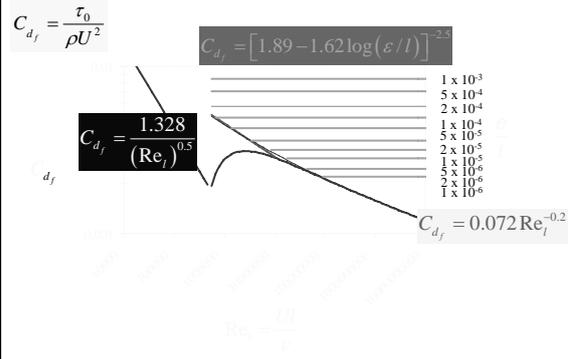
Capa Límite turbulenta

- Spalding (1961) desarrollo una fórmula que es válida en gran parte de la capa límite

$$y^+ = u^+ + e^{-\kappa B} \left[e^{\kappa u^+} - 1 - \kappa u^+ - \frac{(\kappa u^+)^2}{2} - \frac{(\kappa u^+)^3}{6} \right]$$

- κ, B son constantes

Coefficientes de fricción en una placa plana



Resumen capa limite turbulenta

TABLE 10-4

Summary of expressions for laminar and turbulent boundary layers on a smooth flat plate aligned parallel to a uniform stream*

Property	(a)		(b)
	Laminar	Turbulent ⁽¹⁾	Turbulent ⁽²⁾
Boundary layer thickness	$\frac{\delta}{x} = \frac{4.91}{\sqrt{Re_x}}$	$\frac{\delta}{x} \approx \frac{0.16}{(Re_x)^{1/2}}$	$\frac{\delta}{x} \approx \frac{0.38}{(Re_x)^{1/4}}$
Displacement thickness	$\frac{\delta^*}{x} = \frac{1.72}{\sqrt{Re_x}}$	$\frac{\delta^*}{x} \approx \frac{0.020}{(Re_x)^{1/2}}$	$\frac{\delta^*}{x} \approx \frac{0.048}{(Re_x)^{1/4}}$
Momentum thickness	$\frac{\theta}{x} = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}}$	$\frac{\theta}{x} \approx \frac{0.016}{(Re_x)^{1/2}}$	$\frac{\theta}{x} \approx \frac{0.037}{(Re_x)^{1/4}}$
Local skin friction coefficient	$C_{f,x} = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}}$	$C_{f,x} \approx \frac{0.027}{(Re_x)^{1/2}}$	$C_{f,x} \approx \frac{0.059}{(Re_x)^{1/4}}$

* Laminar values are exact and are listed to three significant digits, but turbulent values are listed to only two significant digits due to the large uncertainty affiliated with all turbulent flow fields.

¹ Obtained from one-seventh-power law.

² Obtained from one-seventh-power law combined with empirical data for turbulent flow through smooth pipes.

Conclusiones

- En esta clase vimos cuales son las hipotesis que se adoptan para simplificar las ecuaciones de conservación en el caso de querer analizar el movimiento del fluido dentro de la capa límite
- Existen dos parámetros que resultan de particular interés: el espesor de la capa límite y el coeficiente de fricción
- Los valores de dichos parámetros difieren fuertemente según si el flujo es laminar o turbulento en el interior de la capa límite
- A señalar es que en tanto que en la región laminar $\delta \sim x^{1/2}$ en la región turbulenta $\delta \sim x$
- Los coeficientes de fricción local son un orden de magnitud superiores en el caso de flujos turbulentos
- Una medida de estos efectos la dan los espesores de desplazamiento y de cantidad de movimiento.