Clase 1

Parte administrativa del curso.

Profesores:
José Soto (Parte I: Combinatoria enumerativa).
Martín Matamala (Parte II: Estructuras Finitas).

Auxiliar: Arturo Merino.

3 Controles + Examen: ¿Semanas 4, 8, 12?

Bibliografía

1. Van Lint-Wilson, **A course in combinatorics**.
2. Bóna, **A walk Through Combinatorics**.
3. Bóna, **Intro. to Enumerative Combinatorics**.
4. Stanley, **Enumerative Combinatorics Vol I.**

Combinatoria Estudio de estructuras finitas o discretas.

- Decidir existencia.
- **Conteo**.
- Encontrar estructuras óptimas.
- Problemas extremos

Capítulo I: Conteo Elemental.

1. Motivación: Problemas de selección y conteo.

¿Cuántos pares podemos seleccionar usando elementos de $A = \{a, b, c\}$? Esta pregunta es ambigua: Hay dos parámetros importantes a considerar para clasificar selecciones de elementos de un conjunto dado A.
(1) Si se permiten repetir elementos.
(2) Si el orden importa.
Cuando el orden importa, hablamos de **secuencias** o *palabras* sobre A. Cuando el orden no importa hablamos de **combinaciones** sobre A y usaremos notación de conjuntos (si no se permite repetir) o de multiconjuntos. En particular, cuando deseemos considerar elementos repetidos, es útil poner los elementos en un paréntesis cuadrado (ej: $[a, a, b] = [a, b, a]$). La siguiente tabla nos ayudará a introducir notación.

Selecciones de k objetos.	Sin repetición	Con repetición
Importa el orden (Listas)	k-variaciones. $A^{\underline{k}}$.	k-secuencias. A^k.
No importa el orden (Combinaciones)	k-conjuntos. $\binom{A}{k}$.	k-multiconjuntos. $\left(\!\binom{A}{k}\!\right)$.

Nota: En varios textos, $A^{\underline{k}}$ se denota por $(A)_k$. Usamos la primera notación para evitar confusión con el uso de subindices.

Ejemplo 1. Para $A = \{a, b, c\}$, listamos las continuación las k-variaciones, k-conjuntos y k-multiconjuntos de A, para $k \in \{2, 3, 4\}$.

$$A^{\underline{2}} = \{ab, ac, ba, bc, ca, cb\}, \qquad A^{\underline{3}} = \{abc, acb, bac, bca, cab, cba\}, \qquad A^{\underline{4}} = \emptyset.$$
$$\binom{A}{2} = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}, \qquad \binom{A}{3} = \{\{a, b, c\}\}, \qquad \binom{A}{4} = \emptyset.$$

$$\left(\!\binom{A}{2}\!\right) = \{[a, a], [a, b], [a, c], [b, a], [b, b], [b, c], [c, a], [c, b], [c, c]\}.$$
$$\left(\!\binom{A}{3}\!\right) = \{[a, a, a], [a, a, b], [a, a, c], [a, b, b], [a, b, c], [a, c, c], [b, b, b], [b, b, c], [b, c, c], [c, c, c]\}.$$
$$\left(\!\binom{A}{4}\!\right) = \{[a, a, a, a], [a, a, a, b], [a, a, a, c], \dots\}.$$

Observación 1. Caso especial: $k = 0$.
Para todo A, $A^0 = A^{\underline{0}} = \binom{A}{0} = \left(\!\binom{A}{0}\!\right) = \{\varepsilon\}$ donde ε representa la lista/combinación vacía.

Observación 2. Caso especial: $A = \emptyset$.
Para todo $k \geq 1$, $\emptyset^k = (\emptyset)_k = \binom{\emptyset}{k} = \left(\!\binom{\emptyset}{k}\!\right) = \emptyset$.

Estudiaremos la cardinalidad de los conjuntos anteriormente definidos. Antes de abordar este problema, comencemos introduciendo notación y principios básicos de conteo.

2. Notación

Definición 1 (Conjuntos típicos)**.**

$$\mathcal{P}(X) = \{A \colon A \subseteq X\}, \text{Conjuntopotencia.}$$
$$[n] = \{j \in \mathbb{N} \colon 1 \leq j \leq n\} = \{1, 2, \dots, n\}.$$
$$\mathbb{Z}_n = \{j \in \mathbb{N} \colon j < n\} = \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Notamos que $\mathbb{Z}_0 = [0] = \emptyset$.

Definición 2 (Corchete de Iverson)**.** La expresión $[\![P]\!]$ vale 1 si P es una proposición verdadera, y 0 en otro caso.

Notación versátil. La función $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} (x+1) & \text{Si } x \text{ es par,} \\ x & \text{Si } x \text{ es impar,} \end{cases}$$

se puede escribir simplemente como $f(x) = x + [\![x \text{ es par}]\!]$. La primera forma de definir f es mejor en claridad, mientras que la segunda es más compacta. Otro ejemplo de su utilidad es que permite manipular sumas múltiples con facilidad:

$$\sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{i} j = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} j [\![j \leq i]\!] [\![i \leq N]\!] = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} j [\![j \leq i \leq N]\!]$$
$$= \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{i \in \mathbb{N}} j [\![j \leq N]\!] [\![j \leq i \leq N]\!] = \sum_{j=0}^{N} j \sum_{i=j}^{N} 1.$$

Otro concepto que usaremos frecuentemente es el de palabra o secuencia.

Definición 3. Sea A un conjunto finito o infinito. Una *secuencia* o *palabra* sobre A, de largo $k \in \mathbb{N}$, es una función $w\colon [k] \to A$. Usamos la notación w_i en vez de $w(i)$ para la evaluación de w en i, y decimos que w_i es el i-ésimo símbolo de w. Formalmente no hay diferencia entre secuencias y palabras, más allá de la notación: Para escribir w como secuencia se usa $w = (w_1, w_2, \dots, w_k) = (w_i)_{i=1}^k$. Para escribir w como palabra, se escriben sus símbolos sin separadores entre ellos: $w = w_1 w_2 \dots w_k$.
Denotamos $A^k = \{w_1 w_2 \dots w_k \colon w_i \in A\}$ al conjunto de las palabras (secuencias) sobre A de largo k. En este curso denotaremos a la palabra vacía, es decir, al único elemento de A^0 por $\emptyset$ ó ε indistintamente.

Por ejemplo, si $A = \{a, b, c, d\}$, se tiene que $aba \in A^3$, $cada \in A^4$, etc. Además, es importante aclarar qué pasa para $A = \emptyset$. En dicho caso,

$$\emptyset^k = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } k \geq 1. \\ \{\varepsilon\}, & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

Definición 4. El conjunto de todas las palabras sobre un alfabeto A se denota por A^*. Es decir

$$A^* = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A^k.$$

Si $w \in A^*$, denotamos al largo de w como $|w|$.

Usando el concepto de palabra podemos recordar el concepto de *producto indexado* de conjuntos. Sean $A_1, \dots, A_k$ una secuencia de conjuntos y $B = \bigcup_{i=1}^k A_i$ su unión, entonces se define el producto de la secuencia de conjuntos como todas las palabras sobre B, de largo k, tal que su i-ésimo símbolo está en A_i. Es decir,

$$\prod_{i=1}^{k} A_i = \{w \in B^k \colon w_i \in A_i, \forall i \in [k]\}.$$

Siempre será importante detenernos a entender *para que valores de* k tiene sentido la definición anterior. Ciertamente tiene sentido para $k \geq 1$. El caso $k = 0$ resulta interesante:

$$\prod_{i=1}^{0} A_i = \{w \in B^0 \colon w_i \in A_i, \forall i \in [0]\} = \{\varepsilon\}.$$

En otras palabras el producto vacío resulta tener un elemento: la palabra vacía[1].

Observación 3. En particular, si todos los A_i son iguales a un conjunto A dado, entonces se obtiene que para todo $k \in \mathbb{N}$, $\prod_{i=1}^k A = A^k$.

Observación 4. Si bien el producto indexado es distinto al producto cartesiano iterado, existe una biyección natural entre ambos: basta remover los paréntesis y comas.

$$\begin{aligned} (\cdots(A_1 \times A_2) \times \cdots) \times A_k &\to \prod_{i=1}^{k} A_i \\ ((\cdots(a_1, a_2), \dots), a_k) &\mapsto a_1 a_2 \dots a_k \end{aligned}$$

Bajo esta identificación no hacemos diferencia, por ejemplo, entre $A_1 \times A_2$ y $\prod_{i=1}^2 A_i$.

3. Cardinales finitos y principio biyectivo.

¿Qué es contar un conjunto? Marcar cada elemento iterativamente por un número: *uno, dos, tres,*....
Encontrar una correspondencia entre los objetos a contar y un conjunto básico de referencia (el conjunto $[n]$). Este proceso se puede hacer sin necesidad de usar los naturales como referencia (Ejemplo: Un niño pequeño habitualmente levantará *tantos dedos* como elementos vistos). Así, vemos que la definición más básica para contar no es la de "declarar una cardinalidad" sino más bien la de "poner en correspondencia dos conjuntos".

[1] No confundir esto con el producto no vacío de conjuntos vacíos, ya que éste último si es vacío.

Definición 5. Equipotencia.

Dos conjuntos A y B se dicen *equipotentes* o *equinumerosos* si existe $f\colon A \to B$ función biyectiva. Anotamos en este caso $|A| = |B|$. Decimos informalmente que A y B tienen el mismo número de elementos.

Otra forma de interpretar la definición de equipotencia es la siguiente

Definición 6. Principio Biyectivo. Probar que dos conjuntos tienen el mismo número de elemento equivale a encontrar una biyección entre ambos.

Para declarar cuantos elementos tiene un conjunto. Para esto usamos la siguiente definición.

Definición 7. Cardinales finitos.

Sea A es un conjunto y $n \in \mathbb{N}$. Decimos que $|A| = n$ si $|A| = |\,[n]\,|$. En este caso decimos que *la cardinalidad de A es n* o que *el cardinal* de A es n.
Decimos que el conjunto A es *finito* si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|A| = n$. De otro modo decimos que A es infinito.

Para que la expresión $|A| = n$ esté bien definida, se hace necesario probar que n es el único número natural para el cual $|A| = |\,[n]\,|$. Esto queda propuesto como ejercicio.

Observación 5. Cuando decimos que A tiene n elementos, lo que en verdad estamos haciendo es afirmar que existe una biyección entre A y $[n]$. En varias ocasiones es útil *numerar* los elementos de A, es decir escribir $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Esto no es otra cosa que enunciar la existencia de una biyección $[n] \to A$ dada por $i \mapsto a_i$.

Ejemplo 2. Pruebe que $|\mathbb{Z}_n| = n$.

Solución. En efecto, la función $\mathbb{Z}_n \to [n]$ dada por $i \mapsto i + 1$ es biyectiva (su inversa es $j \mapsto j - 1$). □

Observación 6. En este curso solo probaremos que una función es biyección cuando no sea *evidente*

Ejemplo 3. En un campeonato de fútbol juegan n equipos en una modalidad de eliminación: cada vez que un equipo pierde un partido, sale del campeonato. Además, cada partido debe tener un ganador y un perdedor (no hay empates). ¿Cuál el número mínimo y máximo de partidos que se deben jugar para que quede un solo equipo no eliminado?

Solución. Biyección entre conjunto de partidos jugados y el conjunto de equipos eliminados (hay un perdedor por cada partido que es eliminado, y estos no se pueden repetir). Por lo tanto si deseamos que hayan $n - 1$ eliminados, deberán jugarse $n - 1$ partidos. □

4. Principios de la suma y el producto.

Definición 8. Principio de la suma. Sean A y B conjuntos finitos *disjuntos* entonces

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

(Informal) Si una actividad se puede realizar de a maneras y una segunda actividad se puede realizar de b maneras, y ambas actividades no se pueden hacer a la vez, entonces existe un total de $a + b$ maneras de realizar alguna de las dos actividades.

Definición 9. Principio del producto. Sean A y B conjuntos finitos.

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

(Informal) Si hay a formas de hacer una actividad y b maneras de hacer una segunda actividad entonces existen $a \cdot b$ formas de realizar ambas actividades.

Demostración del principio de la suma.
Sean $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ y $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ conjuntos finitos disjuntos. Use la biyección $f\colon [n+m] \to A \cup B$ dada por

$$f(i) = \begin{cases} a_i & \text{si } i \in [n], \\ b_{i-n} & \text{si } n+1 \leq i \leq n+m \end{cases} \qquad \square$$

Demostración del principio del producto.
Sean $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ y $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ conjuntos finitos. Usar la biyección $f\colon A \times B \to [n \cdot m]$ dada por $f(a_i, b_j) = (i-1)m + j$ $\square$.

Ejemplo 4.

1. Una estudiante debe elegir un ramo electivo para llenar su curriculum. El departamento de matemáticas ofrece 12 ramos electivos que ella puede tomar y el departamento de física ofrece 9. Como los cursos son distintos, el principio de la suma nos dice que ella tiene $12 + 9 = 21$ opciones.

2. Un menú simple en el casino consiste de un plato de entrada y un plato de fondo. El casino ofrece cada dia 3 opciones de platos de entrada y 2 de platos de fondo. Luego el número de menús simples distintos es $3 \cdot 2 = 6$.

Los principios de la suma y del producto se generalizan inmediatamente usando inducción a múltiples conjuntos.

Proposición 5 (Principio de la Suma)**.** *Si $\{A_1, \ldots, A_k\}$ es una partición finita de un conjunto finito A entonces $|A| = \sum_{i=1}^{k} |A_i|$.*

Proposición 6 (Principio del Producto)**.** *Si $A_1, \ldots, A_k$ es una secuencia finita de conjuntos finitos entonces $|\prod_{i=1}^{k} A_i| = \prod_{i=1}^{k} |A_i|$. En particular, si A es finito y $k \in \mathbb{N}$, entonces $\left|A^k\right| = \prod_{i=1}^{k} |A| = |A|^k$.*

Ejemplo 7.

1. ¿Cuántos números naturales entre 1 y 1000 comienzan por la cifra 6?
   Solución: Separemos estos números por cantidad de cifras. De una cifra, hay 1 número que comienza por 6 (el 6). De dos cifras, tenemos los 10 números entre 60 y 69. De tres cifras tenemos los 100 números entre 600 y 699. Luego en total hay $1 + 10 + 100 = 111$ números que satisfacen lo pedido.

2. ¿Cuántos números naturales de a lo más 5 cifras se escriben sin usar la cifra 5?
   Solución: Hay al menos dos formas de contar este conjunto. Una de ellas involucra contar mediante el principio de producto la cantidad de números de i cifras que se escriben sin el 5, y luego sumar las cardinalidades sobre todo i. Esta manera si bien es válida, es algo larga y merece cuidado: Se debe recordar que los números de i cifras (con $i \geq 2$) no pueden empezar con la cifra 0.

   Una solución alternativa es hacer una biyección entre el conjunto contado y las secuencias $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ donde cada a_i puede ser uno de los 9 elementos de $\mathbb{Z}_{10} \setminus \{5\}$. La biyección consiste en completar cada número con 0's a la izquierda. El principio del producto nos garantiza entonces que hay 9^5 números.

3. ¿Cuántas palabras de A^* tienen a lo más k símbolos?
   Solución: Estamos buscando $\left|\bigcup_{i\in 0}^{k} A^i\right| = \sum_{i=0}^{k} |A|^i$. La cantidad anterior depende del cardinal de A y se simplifica usando suma geométrica a ser:
   $$[\![|A| \neq 1]\!] \frac{|A|^{k+1} - 1}{|A| - 1} + [\![|A| = 1]\!](k+1).$$

4. ¿Cuántas números naturales de a lo más k cifras se escriben sin usar la cifra 0?
   Solución: El conjunto que deseamos contar está en biyección con las palabras en $[9]^*$ que tienen entre 1 y k símbolos. Usando el ejercicio anterior, éstas son exactamente
   $$\frac{9^{k+1} - 1}{9 - 1} - |[9]|^0 = \frac{9^{k+1} - 9}{8}.$$

5. Una palabra es palíndroma si al leerse de derecha a izquierda se obtiene la misma palabra. ¿Cuántas palabras palíndromas hay en A^k?
   Solución: La solución depende de si k es par o impar.
   Si k es par, entonces toda palabra palíndroma en A^k se escribe como ww^R, con $w \in A^{k/2}$, donde w^R es la palabra w escrita de derecha a izquierda.
   Si k es impar, entonces toda palabra palíndroma en A^k se escribe como wxw^R, con $w \in A^{(k-1)/2}$, $x \in A$.
   Luego la cantidad pedida es:
   $$[\![k \text{ par}]\!] \cdot |A^{k/2}| + [\![k \text{ impar}]\!] \cdot |A^{(k-1)/2}| \cdot |A| \;=\; A^{\lceil k/2 \rceil}.$$

5. Ejemplo Importante: Fibonacci y Secuencias de Conteo

Considere un tablero de $1 \times (n-1)$ casilleros. (El $n-1$ es para coincidir con la definición moderna) ¿De cuántas maneras podemos cubrirlo exactamente usando solo monominós y dominós?
Llamemos F_n a la respuesta. ¿Cuánto vale esta cantidad?
Es fácil calcular los primeros términos. $F_0 = 0$ (no hay tableros de -1 casilleros), $F_1 = 1$ (hay una sola forma de cubrir el tablero vacío: no usar piezas). $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3 \ldots$ y en general la secuencia resulta ser:

$$f = (0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots)$$

¿Hay algún patrón que nos permita entender mejor esta *secuencia de conteo?*
Podemos obtener el valor de f_n a partir de los anteriores notando que para $n \geq 3$ hay dos formas de poner la primera ficha: si usamos un monominó, hay exactamente f_{n-1} maneras de cubrir el resto, y su usamos un dominó hay f_{n-2} maneras de cubrir el resto. El principio de la suma nos dice entonces que

$$\forall n \geq 3, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

de hecho, la recurrencia también vale para $n = 2$, así que F satisface:

$$\forall n \geq 2, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, f_0 = 0, f_1 = 1$$

La secuencia anterior se conoce como secuencia de Fibonacci (podemos tomar el problema original como su definición combinatorial: f_n es el cardinal del conjunto de maneras de cubrir un tablero de 1 por $n-1$ casilleros con mononimós y dominós)
En el curso nos encontraremos con muchas secuencias de conteo (secuencias cuyo n-ésimo término cuenta el cardinal de algún conjunto), por ejemplo, la secuencia

$$a = (1, 2, 4, 8, \ldots)$$

tal que $a_n = 2^n$, es la secuencia tal que a_n cuenta el cardinal de $\{0,1\}^n$.
Una herramienta util para encontrar propiedades de secuencias conocidas de conteo es la página web `https://oeis.org` de la enciclopedia online de sucesiones enteras (the online encyclopedia of integer sequences).

6. Variaciones y permutaciones de un conjunto. Principio general del producto.

Sea A un conjunto finito.

Definición 10. Una palabra sobre A que no contiene símbolos repetidos se denota *variación*, y si tiene largo $k \in \mathbb{N}$ la llamamos k-variación.
Denotamos por $A^{\underline{k}}$ al conjunto de las k-variaciones de A. Además, denotamos $n^{\underline{k}}$ al cardinal de $[n]^{\underline{k}}$. A esta cantidad la llamamos factorial decreciente de n sobre k.

Nota: En varios textos, $A^{\underline{k}}$ se denota por $(A)_k$. Usamos la primera notación para evitar confusión con el uso de subíndices.

Definición 11. Una variación de A que contiene a todos los símbolos de A se denota *permutación* u *ordenamiento* de A. Denotamos por $A!$ al conjunto de permutaciones de A y denotamos por $n!$ al cardinal de $[n]!$. A esta cantidad la llamamos factorial de n.

Nota: La notación $A!$ no es estándar, usar con cuidado.

Las variaciones y permutaciones de conjuntos aparecen naturalmente en problemas combinatoriales por lo cual es bueno estudiar su cardinal. Notamos que si A es un conjunto con n elementos, entonces directamente $\left|A^{\underline{k}}\right| = n^{\underline{k}}$ por lo que solo basta entender estos valores.
Antes de escribir la fórmula general, veamos que sucede si k es 0. Como la única 0-variación de cualquier conjunto es la palabra vacía, se tiene

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon\ n^{\underline{0}} = |[n]^{\underline{0}}| = \{\emptyset\} = 1.$$

En particular $0! = 0^{\underline{0}} = 1$. Por otro lado notamos que

$$\forall k \geq n+1, n^{\underline{k}} = |[n]^{\underline{k}}| = 0,$$

ya que no hay k símbolos distintos en $[n]$.
La próxima proposición da una fórmula general para los factoriales.

Proposición 8.

$$\forall n, k \in \mathbb{N} : \ n^{\underline{k}} = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \prod_{i=n-k+1}^{n} i.$$

En particular,

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ n! = n^{\underline{n}} = n \cdot (n-1) \cdots 1 = \prod_{i=1}^{n} i.$$

y luego,

$$\forall n, k \in \mathbb{N} : \ n^{\underline{k}} = [\![k \leq n]\!] \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Demostración. El caso $k \geq n+1$ ya fue estudiado antes, así que enfoquémonos en el caso $k \leq n$. Considere la biyección

$$[n] \times [n-1] \times \cdots \times [n-k+1] \to [n]^{\underline{k}},$$

donde la secuencia $c_1 c_2 c_3 \ldots c_{n-k+1}$ es llevada a la k-variación cuyo i-ésimo símbolo es el c_i-ésimo elemento de $[n]$ que no haya sido usado aún. La segunda parte de la proposición es directa de la anterior. Y la tercera se obtiene pues $[n]^{\underline{k}} = \emptyset$ para $k \geq n+1$, y de combinar las dos expresiones anteriores para el caso $k \leq n$. □

En la demostración anterior parece algo forzada la biyección antes de usar el principio del producto. Para calcular $|[n]^{\underline{k}}|$ basta notar que toda k-variación se puede describir decidiendo iterativamente cada símbolo. El primer símbolo se puede elegir de n maneras, el segundo de $n-1$, y así sucesivamente. Estamos tentados a usar el principio del producto pero no podemos hacerlo directamente tal como está planteado. Para estos casos planteamos la siguiente forma general del principio del producto.

Proposición 9 (Principio General del Producto)**.**
(Informal) Si debemos realizar una secuencia de k elecciones, donde

- *La primera elección tiene s_1 posibilidades.*
- *Para cada forma fija de realizar las primeras $i-1$ elecciones, la i-ésima tiene s_i posibilidades.*

Entonces la secuencia de elecciones se puede realizar de $s_1 \cdot s_2 \cdots s_k$ maneras.

(Formal) Sea $k \in \mathbb{N}$ y A un conjunto finito. Sea además $B \subseteq A^k$. Decimos que una palabra $w \in A^i$ es un prefijo de B si existe $w' \in A^{k-i}$ tal que $ww' \in B$. Si el conjunto B satisface que

- *B tiene s_1 prefijos de largo 1.*
- *Para cada prefijo w de largo $i-1$ de B, existen exactamente s_i símbolos a en A tal que wa es un prefijo de largo i de B.*

Entonces $|B| = \prod_{i=1}^{k} s_i$.

El principio general del producto es una consecuencia del principio (normal) del producto que queda propuesta como ejercicio.
Tenemos lista la primera fila de nuestra tabla de selecciones de elementos de un conjunto.

7. Demostraciones Combinatoriales

Una aplicación importante de los principios anteriores es que nos permiten en varios casos demostrar identidades usando argumentos combinatoriales.
Para probar una identidad del tipo $r = s$, donde r y s son expresiones aritméticas que se evalúan a números naturales, podemos encontrar conjuntos R y S, con $|R| = r$ y $|S| = s$ y luego encontrar una biyección entre R y S. A este tipo de demostraciones se le conoce como **demostración combinatorial.**
En esta sección damos un par de ejemplos muy básicos. El poder de este tipo de demostraciones se verá más adelante.

Ejemplo 10. Probar combinatorialmente que para todo número $n \in \mathbb{N}^+$,

$$n^2 = (n+1)(n-1) + 1.$$

Solución: Propuesta

De hecho, la fórmula para la suma geométrica se puede probar combinatorialmente.

Ejemplo 11. Pruebe combinatorialmente que para todo n, m números naturales con $m \geq 2$, se tiene

$$\sum_{i=0}^{n} m^i = \frac{m^{n+1} - 1}{m - 1}.$$

Solución: Propuesta

Un ejemplo importante de demostración combinatorial consiste en probar que el conjunto potencia de $[n]$ tiene exactamente 2^n elementos.

Ejemplo 12. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$|\mathcal{P}(n)| = 2^n.$$

Solución: Considere la biyección $\varphi\colon \mathcal{P}(n) \to \{0,1\}^n$ dada por

$$\varphi(X)_i = [\![i \in X]\!].$$

Con esto, $|\mathcal{P}(n)| = |\{0,1\}^n| = 2^n$. ■

Clase 2

Antes de continuar con selecciones. Enunciemos dos extensiones naturales del principio biyectivo.

1. Principio Inyectivo y Principio Sobreyectivo

Proposición 13 (Principio Inyectivo)**.** *Sean A y B conjuntos donde B es finito.*

A es finito y $|A| \leq |B|$ si y solo si existe una función inyectiva de A a B.

Demostración. La dirección hacia la derecha es simple. Sean $f\colon A \to [m]$ y $g\colon [n] \to B$ biyecciones, donde $m \leq n$. Como ambas funciones son inyectivas, la función $h\colon A \to B$ dada por $h(x) = g(f(x))$ es inyectiva.
Veamos la otra dirección. Sea $h\colon A \to B$ una función inyectiva y sea $g\colon B \to [n]$ una biyección. Luego la función $f = g \circ h\colon A \to [n]$ es inyectiva. Usando que $f(A) \subseteq [n]$ y que todo subconjunto de un conjunto finito es finito (ejercicio) tenemos que $f(A)$ es finito. Como f es biyección entre A y $f(A)$, también lo es A. Finalmente tenemos que $|A| = |f(A)| \leq n = |B|$. □

Comentario 14. El principio inyectivo puede ser modificada a una *definición* de orden para cardinales generales: $|A| \leq |B|$ se define como la existencia de una función inyectiva de A en B.

Otra forma de interpretar el principio anterior es el siguiente.

> (**Principio Inyectivo)** Para probar que un conjunto tiene una cantidad menor o igual de elementos que otro, basta encontrar una inyección (i.e., una función inyectiva) del primer conjunto al segundo.
>
> En particular, si se encuentra una inyección de A en B, y una inyección de B en A, entonces A y B tienen el mismo cardinal.

Comentario 15. La última afirmación también es cierta para conjuntos infinitos, y se conoce como el Teorema de Cantor-Schröder–Bernstein (si nunca lo ha hecho, puede intentar demostrarlo).

Una variante del principio anterior es la siguiente

Proposición 16 (Principio Sobreyectivo)**.** *Sean A y B conjuntos donde B es finito.*

A es finito y $|A| \leq |B|$ si y solo si existe una función sobreyectiva de B a A.

Demostración. La dirección hacia la derecha es similar a la de la proposición anterior. Sean $f\colon [n] \to A$ y $g\colon B \to [m]$ biyecciones, donde $n \leq m$. Definamos además la función $f'\colon [m] \to A$ como $f'(x) = f(\min(x, n))$. Como f es sobreyectiva, f' también lo es. Como la composición de funciones sobreyectivas es sobreyectiva, concluimos que $f' \circ g\colon B \to A$ es sobreyectiva.
Para la otra dirección sea $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ y $f\colon B \to A$ una función sobreyectiva. La función $h\colon A \to B$ dada por $h(a) = b_i$ donde i es el mínimo índice tal que $f(b_i) = a$ está bien definida (siempre existe este índice pues $f^{-1}(a)$ es no vacío y $\mathbb{N}$ es bien ordenado) y es inyectiva. Por la proposición anterior A es finito y $|A| \leq |B|$. □

Comentario 17. El principio sobreyectivo también funciona para conjuntos infinitos, pero su demostración requiere el uso del axioma de elección (interesantemente, es equivalente al axioma de elección).

Podemos rescribir el principio sobreyectivo de una manera más coloquial como sigue.

> (**Principio Sobreyectivo)** Para probar que un conjunto tiene una cantidad menor o igual de elementos que un segundo conjunto, basta encontrar una sobreyección (i.e., una función sobreyectiva) del segundo conjunto al primero.
>
> En particular, si se encuentra una sobreyección de A en B, y una sobreyección de B en A, entonces A y B tienen el mismo cardinal.

Los principios anteriores nos permiten dar distintas maneras de probar que dos conjuntos tienen el mismo cardinal.

Corolario 18. *Sean A y B dos conjuntos finitos. Los siguientes son equivalentes.*

1. $|A| = |B|$.
2. *Existe una inyección de A en B y una inyección de B en A.*
3. *Existe una sobreyección de A en B y una sobreyección de B en A.*
4. *Existe una inyección de A en B y una sobreyección de A en B.*

Demostración. Directo. □

Con estos principios podemos dar demostraciones combinatoriales para desigualdades como la siguiente.

Ejemplo 19. Pruebe combinatorialmente que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \leq 2^n$.
Solución: El lado derecho cuenta naturalmente el conjunto $\mathbb{Z}_2^n = \{0,1\}^n$. Tomemos $X = \{0^{i-1}10^{n-i-1} \in \mathbb{Z}_2^n : i \in [n]\}$ como el conjunto de palabras de $\mathbb{Z}_2^n$ con exactamente un símbolo 1. Claramente, $|X| = n$ y como X se inyecta en $\mathbb{Z}_2^n$ por inclusión, se tiene la desigualdad.

2. Funciones, inyecciones y biyecciones

Con la maquinaria que tenemos hasta el momento es sencillo contar ciertas clases de funciones.
Primero, observamos que A^k no es más que una notación agradable para denotar al conjunto de funciones de $[k]$ en A. Esta notación es muy flexible y se puede extender un poco.

Definición 12. El conjunto de funciones de A en B se denota como B^A. También definimos

$$\begin{aligned}\mathrm{Iny}(A,B) &= \{f \in B^A \mid f \text{ inyectiva}\},\\ \mathrm{Sob}(A,B) &= \{f \in B^A \mid f \text{ sobreyectiva}\},\\ \mathrm{Biy}(A,B) &= \{f \in B^A \mid f \text{ biyectiva}\}.\end{aligned}$$

Contar funciones generales y funciones inyectivas es directo.

Proposición 20. *Para A y B finitos,*

$$|B^A| = |B|^{|A|}.$$

Demostración. Sea $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, con $n = |A|$. La función $\varphi : B^A \to B^n$ dada por $\varphi(f)_i = f(a_i)$ es una biyección. □

Proposición 21. *Para A y B finitos,*

$$|\mathrm{Iny}(A,B)| = |B|^{\underline{|A|}}.$$

Demostración. Sea $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, con $n = |A|$. La función $\varphi : \mathrm{Iny}(A,B) \to B^{\underline{n}}$ dada por $\varphi(f)_i = f(a_i)$ es una biyección. □

Contar sobreyecciones es un poco más complejo así que lo pospondremos.
Un caso particularmente interesante resulta al contar biyecciones de un conjunto en otro. Notamos que $\mathrm{Biy}(A,B) \neq \emptyset$ si y solo si $|A| = |B|$, y en este caso (suponiendo A finito)

$$\mathrm{Biy}(A,B) = \mathrm{Biy}(A,A) = \mathrm{Iny}(A,A)$$

por lo que

$$|\mathrm{Biy}(A,B)| = [\![|A| = |B|]\!]\,|A|!$$

Otra forma de entender los resultados anteriores es que las funciones se pueden codificar como palabras, las inyecciones como variaciones y las biyecciones como ordenamientos o permutaciones. De hecho, en álgebra, a las funciones biyectivas de un conjunto en si mismo se le denota permutaciones.

Definición 13. Una permutación de A es una función biyectiva de A en si misma. Denotamos al conjunto de permutaciones de A como $\mathcal{S}_A = \{f \in A^A \mid f \text{ biyectiva}\}$. Además, denotamos $\mathcal{S}_n := \mathcal{S}_{[n]}$.

La notación $\mathcal{S}_n$ se suele leer "grupo simétrico de n elementos" y se usa para recordar que este conjunto junto a la composición forma un grupo.

3. Combinaciones: subconjuntos y multiconjuntos

Recordemos la tabla de selecciones con la que comenzamos el curso.

Selecciones de k objetos.	Sin repetición	Con repetición
Importa el orden (Listas)	k-variaciones. $A^{\underline{k}}$.	k-secuencias. A^k.
No importa el orden (Combinaciones)	k-conjuntos. $\binom{A}{k}$.	k-multiconjuntos. $\left(\!\binom{A}{k}\!\right)$.

Definición 14. Para todo $n, k \in \mathbb{N}$, definimos

$$n^k := \left|\, [n]^k \,\right| \qquad \text{(Potencias naturales)}$$

$$n^{\underline{k}} := \left|[n]^{\underline{k}}\right| \qquad \text{(Factorial decreciente)}$$

$$\binom{n}{k} := \left|\binom{[n]}{k}\right| \qquad \text{(Combinatorio de } n \text{ sobre } k\text{, o coeficiente binomial de } n \text{ sobre } k\text{)}$$

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) := \left|\left(\!\binom{[n]}{k}\!\right)\right| \qquad \text{(Multicombinatorio de } n \text{ sobre } k\text{)}$$

$$n! := n^{\underline{n}} \qquad (n \text{ factorial})$$

Observación 7. Si $|A| = n$ entonces $|A^k| = n^k$, $|A^{\underline{k}}| = n^{\underline{k}}$, $\left|\binom{A}{k}\right| = \binom{n}{k}$ y $\left|\left(\!\binom{A}{k}\!\right)\right| = \left(\!\binom{n}{k}\!\right)$. Estas igualdades se prueban usando la biyección entre A y $[n]$.

Puede parecer extraño que hayamos *redefinido* las potencias naturales. Sin embargo al hacerlo de esta manera respondemos de inmediato la siguiente duda natural ¿Cómo definimos 0^0? En general, ¿como definimos los valores anteriores cuando $n = 0$ o $k = 0$?

Observación 8. Usando las definiciones y observaciones anteriores, se concluye que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$n^0 = n^{\underline{0}} = \binom{n}{0} = \left(\!\binom{n}{0}\!\right) = 1.$$

En particular,

$$0^0 = 0^{\underline{0}} = \binom{0}{0} = \left(\!\binom{0}{0}\!\right) = 1,$$

y

$$0! = 0^{\underline{0}} = 1.$$

Por otro lado, para todo $k \geq 1$

$$0^k = 0^{\underline{k}} = \binom{0}{k} = \left(\!\!\binom{0}{k}\!\!\right) = 0.$$

Como es de esperar, la definición de potencias naturales coincide con la habitual. Es decir, $(\forall n, k \in \mathbb{N}) \quad n^k = \prod_{i=1}^{k} n$.
Ya hemos discutido las variaciones y secuencias. Prosigamos con las combinaciones de un conjunto. Al igual que antes notamos que si A tiene n elementos, entonces directamente $\left|\binom{A}{k}\right| = \binom{n}{k}$. La próxima proposición nos da una fórmula para esta cantidad.

Proposición 22.

$$\forall n, k \in \mathbb{N} : \ \binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = [\![k \leq n]\!] \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Demostración. Considerar la biyección natural: $\binom{[n]}{k} \times \mathcal{S}_k \to [n]^{\underline{k}}$, donde cada k-variación en $[n]^{\underline{k}}$ se obtiene eligiendo primero un subconjunto de $[n]$ de tamaño k y luego eligiendo un orden de dicho subconjunto. □

Antes de proseguir con los multiconjuntos, detengámonos a resolver algunos problemas.

Ejercicios resueltos 23. De una demostración combinatorial de las siguientes identidades-

1. $\forall 0 \leq k \leq n : \ \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. $\forall k, n \in \mathbb{N} : \ \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$.
3. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Demostración.

1. Usar la biyección $\binom{[n]}{k} \to \binom{[n]}{n-k}$ dada por $X \mapsto [n] \setminus X$ (complemento).
2. Basta notar que $\binom{[n+1]}{k+1} = \underbrace{\binom{[n]}{k+1}}_{\text{Conjuntos sin } n+1} \cup \left\{\{n+1\} \cup Y : Y \in \binom{[n]}{k}\right\}$ y que la unión es disjunta.
3. Directo de $\mathcal{P}([n]) = \bigcup_{k=0}^{n} \binom{[n]}{k}$, y del hecho que $2^n = |\mathcal{P}([n])|$. □

Uno de los ejercicios anteriores nos permite dar una definición alternativa de los coeficientes binomiales en función de una recurrencia. Esto aparecerá con cierta frecuencia en el curso.

Proposición 24. *Los números* $\left(\quad \binom{n}{k} \quad\right)_{n,k \geq 0}$ *están definidos por la siguiente recurrencia:*

$$\forall k, n \geq 1 : \ \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

con valores de borde, $\binom{n}{0} = 1$*, para* $n \geq 0$ *y* $\binom{0}{k} = 0$*, para* $k \geq 1$.

Tratemos ahora los multiconjuntos. Un multiconjunto de A es una selección de objetos de A donde cada elemento puede aparecer más de una vez y el orden no importa. Así $[a, b, a]$ es un multiconjunto donde a aparece 2 veces y b aparece 1 vez. Para poder tratar con ellos necesitamos una definición formal.

Definición 15. Un multiconjunto x de A es una función $x \colon A \to \mathbb{N}$, donde $x(a)$ representa el número de veces que se selecciona $a \in A$. La cantidad $\sum_{a \in Dom(x)} x(a)$ se denomina *tamaño* de x.

Recordemos que $\left(\!\binom{A}{k}\!\right)$ es la familia de multiconjuntos de A de tamaño k, y que si $A = [n]$, $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ representa su cardinalidad. En particular, es directo notar que $\left(\!\binom{0}{0}\!\right) = 1$, $\left(\!\binom{n}{0}\!\right) = \left(\!\binom{0}{k}\!\right) = 0$ si $n, k > 0$. Ahora estamos listos para encontrar el valor de $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$.

Proposición 25.

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Demostración. Considere la biyección que a un multiconjunto x de $[n]$ de tamaño k le asocia la palabra $x' \in \{\bullet, |\}^{n+k-1}$ dada por

$$x' = \underbrace{\bullet \ldots \bullet}_{x(1)} \mid \underbrace{\bullet \ldots \bullet}_{x(2)} \mid \cdots \mid \underbrace{\bullet \ldots \bullet}_{x(n-1)} \mid \underbrace{\bullet \ldots \bullet}_{x(n)}.$$

La asignación $x \mapsto x'$ es una biyección entre los multiconjuntos de $[n]$ de tamaño k, $\left(\!\binom{[n]}{k}\!\right)$ y las palabras en $\{\bullet, |\}^{n+k-1}$ con exactamente k símbolos $\bullet$ y $n-1$ separadores $|$. El último conjunto, a su vez, está en biyección con $\binom{[n+k-1]}{k}$, ya que cada palabra x' está definida exactamente por el conjunto de índices i en $[n+k-1]$ tales que $x'_i = \bullet$. □

Al igual que antes, podemos dar una definición alternativa de los números $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ via una recurrencia.

Proposición 26. *Los números* $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)_{n,k\geq 0}$ *están definidos por la siguiente recurrencia:*

$$\forall k, n \geq 1 : \ \left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \left(\!\binom{n}{k-1}\!\right) + \left(\!\binom{n-1}{k}\!\right).$$

con valores de borde, $\left(\!\binom{n}{0}\!\right) = 1$*, para* $n \geq 0$ *y* $\left(\!\binom{0}{k}\!\right) = 0$*, para* $k \geq 1$*.*

Demostración. Propuesta. □

Gracias a las proposiciones anteriores podemos completar el siguiente cuadro con las cardinalidades de las selecciones de k objetos de un conjunto A de n elementos.

Selecciones de k objetos.	Sin repetición	Con repetición
Importa el orden (Listas)	k-variaciones. $\lvert A^{\underline{k}}\rvert = n^{\underline{k}} = \prod_{i=n-k+1}^{n} i.$	k-secuencias. $\lvert A^k\rvert = n^k.$
No importa el orden (Combinaciones)	k-conjuntos. $\left\lvert\binom{A}{k}\right\rvert = \binom{n}{k}.$	k-multiconjuntos. $\left\lvert\left(\!\binom{A}{k}\!\right)\right\rvert = \left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{n+k-1}{k}.$

4. Composiciones de un entero.

Definición 16. Una **composición** de n en k partes es una solución a la ecuación $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ con $x_i \in \mathbb{N}^+$.
Una **composición débil** de n en k partes es una solución a la ecuación $x_1 + \cdots + x_k = n$ con $x_i \in \mathbb{N}$.
Al conjunto de los $x\colon [k] \to [n]$ composiciones de n en k partes lo denotamos por $\mathrm{COM}(n,k)$.
Al conjunto de los $x\colon [k] \to [n] \cup \{0\}$ composiciones débiles de n en k partes lo denotamos por $\mathrm{WCOM}(n,k)$.
Además, denotamos $\mathrm{com}(n,k) = |\,\mathrm{COM}(n,k)|$ y $\mathrm{wcom}(n,k) = |\,\mathrm{WCOM}(n,k)|$.

Notemos que $\mathrm{WCOM}(n,k) = \left(\!\binom{[k]}{n}\!\right)$. Gracias a esto prodemos probar el siguiente resultado.

Proposición 27. *Para todo* $n, k \in \mathbb{N}$*,*

$$\mathrm{wcom}(n,k) = \binom{n+k-1}{n}.$$

$$\mathrm{com}(n,k) = \mathrm{wcom}(n-k,k) = [\![k \leq n]\!]\binom{n-1}{n-k}.$$

Demostración. La primera igualdad viene del hecho que cada multiconjunto de $[k]$ largo n se puede ver como una composición débil de n en k partes. La segunda igualdad sale de que al restar uno de cada parte de una composición de $n+k$ se obtiene una composición débil de n. □

Observación 9. No es bueno tentarse a usar la identidad $\binom{n-1}{n-k} = \binom{n-1}{k-1}$ y escribir que $\mathrm{com}(n,k) = [\![k \leq n]\!]\binom{n-1}{k-1}$ pues la expresión de la izquierda tiene sentido para todo $k \geq 0$ pero la expresión de la derecha no está definida cuando $k = 0$. Por otro lado la expresión $[\![k \leq n]\!]\binom{n-1}{n-k}$ tiene sentido incluso para $k = 0$ (más adelante le daremos un sentido al caso $n = k = 0$ donde tendremos $\binom{-1}{0} = 1$).

Proposición 28. *Para $k, n \in \mathbb{N}$,*

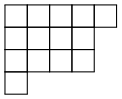
$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{com}(n,k) = [\![n \geq 1]\!]2^{n-1} + [\![n = 0]\!].$$

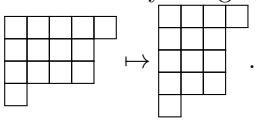
Demostración. Propuesta. □

5. Particiones de un entero

Definición 17. Una **partición**[1] de $n \in \mathbb{N}$ es un vector $a = (a_1, \ldots, a_k)$ con $\sum_{i=1}^{k} a_i = n$, $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k \geq 1$. Si a es una partición de n, escribimos $a \vdash n$. Denotamos por $p_k(n)$ al número de particiones de n en **exactamente**[2], y al total lo denotamos $p(n)$.

Definición 18. El **Diagrama de Ferrers** (también conocido como **Diagrama de Young**) de una partición $a = (a_1, \ldots, a_k)$ de n es un arreglo de cajas cuadradas ordenadas en k filas horizontales (alineadas a la izquierda) de tamaños $a_1, \ldots, a_k$ respectivamente ordenadas verticalmente.

Por ejemplo, el diagrama de Ferrers de $(5,4,4,1)$ es  .

Definición 19. La partición **conjugada** de a es la partición a^* cuyo diagrama de Ferrers es el transpuesto del diagrama de a. Por ejemplo, $(5,4,4,1)^* = (4,3,3,3,1)$.  .

Notemos que $(\cdot)^*$ es una biyección (de hecho una involución) del conjunto de particiones de n.

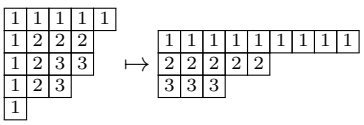
Proposición 29. *El número de particiones de n en k partes es igual al número de particiones de n cuya parte más grande tiene largo k.*

Demostración. Basta notar que $()^*$ es una biyección entre ambos conjuntos. □

Podemos usar Diagramas de Young para probar otras relaciones sorprendentes.

Lema 30. *El número de particiones de n autoconjugadas es igual al número de particiones de n con todas sus partes impares y distintas.*

Demostración. Sea π una partición autoconjugada. Crearemos una nueva partición $f(\pi)$ con todas sus partes impares. Borremos el primer gancho (primera fila y columna) y agreguemos los cuadrados borrados como primera fila de $f(\pi)$. Repitamos el proceso borrando (borrar ganchos y agregar filas). Con esto el objeto creado $f(\pi) = (2\pi_1 - 1, 2\pi_2 - 3, \ldots)$ (donde el número de partes es tal que su última entrada no es 0), es una particion con todas sus partes impares y distintas. Claramente el proceso es reversible.

Ejemplo: $(5,4,4,3,1) \mapsto (9,5,3)$ y gráficamente  □

[1] ¡Cuidado! El nombre es similar a las particiones de un conjunto pero el sentido es distinto.
[2] Ojo, algunos autores llaman $p_k(n)$ a las particiones en a lo más k partes.

Una manera alternativa de codificar $a \vdash n$ es como un vector de multiplicidades $b \in$ donde b_i es igual al número de veces que i aparece como parte de a. Inmediátamente concluímos las siguientes proposiciones.

Proposición 31. *El número de soluciones enteras x de $\sum_i ix_i = n$, con $x_i \geq 0$ es exactamente $p(n)$.*
El número de soluciones enteras x de $\sum_i ix_i = n$, con $x_i \geq 0$ y $\sum_i x_i = k$ es exactamente $p_k(n)$.

6. Anagramas

En esta sección nos interesa estudiar cuantas palabras se pueden obtener al permutar las letras de una palabra dada.

Definición 20. Sea $w \in A^*$ una palabra, y $a \in A$ un símbolo. Denotamos por $|w|$ al largo de w es decir, el único valor k tal que $w \in A^k$ y por $|w|_a$ al número de veces que a aparece en w, es decir $|w|_a = |\{i \in [|w|] \colon w_i = a\}|$.

Definición 21. Sea $w \in A^*$. Llamamos *anagrama de w* (o permutación de w) a toda palabra w' que se puede obtener de w al permutar sus letras, y usamos $\mathrm{Per}(w)$ para denotar al conjunto de todas las permutaciones de w. Es decir

$$\mathrm{Per}(w) = \{w' \in A^* \colon |w'|_a = |w|_a \, \forall a \in A\}.$$

Proposición 32. *Para toda palabra $w \in A^*$,*

$$|\mathrm{Per}(w)| = \frac{|w|!}{\prod_{a \in A} |w|_a!}.$$

Daremos dos demostraciones de esta propiedad. Una por inducción y una combinatorial

Demostración.
(Inducción en $|A|$)|1| Para $|A| \leq 1$, la demostración es directa, pues $\mathrm{Per}(w) = \{w\}$ y $1 = \frac{1!}{1} = \frac{0!}{1}$, así que supongamos que $|A| \geq 2$. Sea a^* un símbolo cualquiera de A y sea $B = A \setminus \{a^*\}$. Para una palabra $v \in \mathrm{Per}(w)$, llamemos $v' \in B^*$ a la subpalabra de v obtenida al borrar las apariciones de a^*, y $\sigma(v) \in \binom{[|w|]}{|w|_{a^*}}$ al conjunto de posiciones j tal que $v_j = a^*$. La asignación $v \mapsto (v', \sigma(v))$ es una biyección entre $\mathrm{Per}(w)$ y $\mathrm{Per}(w') \times \binom{[|w|]}{|w|_{a^*}}$. Usando principio del producto e inducción tenemos que

$$|\mathrm{Per}(w)| = \frac{|w'|!}{\prod_{a \in B} |w'|_a!} \cdot \binom{|w|}{|w|_{a^*}} = \frac{|w'|!}{\prod_{a \in B} |w'|_a} \cdot \frac{|w|!}{|w'|!|w|_{a^*}!} = \frac{|w|!}{\prod_{a \in A} |w|_a!}.$$

(Demostración combinatorial),
Colguemos a cada letra a de w un índice i que representando el número de aparición de la letra a en w. Más formalmente, para todo $k \in [|w|]$ sea $\varphi(k) = (a, j)$ donde la j-ésima aparición de a en la palabra w se encuentra en la k-ésima posición de w. Con esto, $P := \varphi([|w|])$ es un conjunto de $|w|$ pares ordenados distintos.
Considere la función

$$\varphi \colon P^{\underline{|w|}} \to \mathrm{Per}(w) \times \prod_{a \in A} [|w|_a]^{\underline{|w|_a}}$$

dada por

$$\varphi((v_1, i_1)(v_2, i_2) \cdots (v_{|w|}, i_{|w|})) = (v, (s_a)_{a \in A})$$

donde $v = v_1 v_2 \dots v_{|w|}$, y para cada $a \in A$, s_a es la subpalabra de $i_1 i_2 \dots i_{|w|}$ obtenida al quedarse solo con los i_j tales que $v_j = a$. Esta función es biyectiva y prueba que

$$|w|! = |\varphi \colon P^{\underline{|w|}}| = |\mathrm{Per}(w)| \prod_{a \in A} |[|w|_a]^{\underline{|w|_a}}| = |\mathrm{Per}(w)| \prod_{a \in A} |w|_a! \quad \square$$

La expresión calculada en la proposición anterior aparece con relativa frecuencia, por lo cual recibe una notación especial.

Definición 22. Si $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ es una composición débil de $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^k n_i!}.$$

La proposición anterior indica que $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$ es exactamente el número de anagramas de una palabra con n_i símbolos de tipo i.

Clase 3

1. Particiones de un conjunto

Definición 23. Una secuencia $(A_1, \ldots, A_k)$ de conjuntos **no vacíos** y disjuntos par a par tal que $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = A$ se conoce como *partición ordenada* de A.[1]

Las partes de una partición se conocen como bloques.

Definición 24. A cada partición ordenada $\Pi = (A_1, \ldots, A_k)$ de A en k bloques le asociamos la composición x de $|A|$ en k partes que satisface $x_i = |A_i|$, para $i \in [k]$.

Proposición 33. *Sea $c = (c_1, \ldots, c_k)$ una composición de $[n]$. El número de particiones ordenadas $(A_1, \ldots, A_k)$ de $[n]$ asociadas a la composición c es igual a*

$$\binom{n}{c_1, \ldots, c_k}.$$

Demostración. Basta notar que cada partición ordenada descrita se puede codificar de manera única como una permutación w de la palabra $1^{c_1}2^{c_2}\cdots k^{c_k}$, donde $w_j \in [k]$ representa el único índice tal que $j \in A_{w_j}$. □

Definición 25. Un conjunto $\{A_1, \ldots, A_k\}$ formado por conjuntos **no vacíos** y disjuntos par a par tal que $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = A$ se conoce como *partición* (no ordenada) de A.

Definición 26. A cada partición no ordenada $P = \{A_1, \ldots, A_k\}$ de A en k bloques le asociamos la partición (entera) x de $|A|$ que codifica los tamaños (ordenados de mayor a menor) de los bloques de P. Además, si m_i denota el número de bloques de tamaño i en P (es decir, $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es el vector de multiplicidades de x), diremos que P tiene *tipo* $m = (m_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Proposición 34. *Sea $a = (a_1, \ldots, a_k)$ una partición de n y sea $m = (m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ su vector de multiplicidades (es decir, número de veces que aparece i en a). El número de particiones de $[n]$ de tipo m (o equivalentemente, el número de particiones de $[n]$ asociadas a la partición a) es*

$$\binom{n}{a_1, \ldots, a_k} \frac{1}{m_1! \cdots m_n!}.$$

Demostración. Hay $\binom{n}{a_1,\ldots,a_k}$ formas de elegir una partición ordenada de $[n]$, (es decir, la parte i tiene a_i elementos). Sin embargo si reordenamos las partes que tienen el mismo tamaño obtenemos la misma partición de $[n]$. □

Estudiemos un poco más las particiones.

Definición 27. Denotemos por $\mathcal{P}(n, k)$ al conjunto de todas las particiones no ordenadas de $[n]$ en k bloques no vacíos.

Definición 28. Números de Stirling del segundo tipo. Los valores $S(n, k) = |\mathcal{P}(n, k)|$ se conocen como números de Stirling del segundo tipo[2].

Calcular estos números no es una tarea directa. Algunos casos son simples:

Observación 10. Se cumple que:

1. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $S(n, n) = 1$.

[1] Notar la similitud entre partición ordenada de $[n]$ y composición de n.
[2] Esta cantidad también se denota en algunos libros como $\left\{ {n \atop k} \right\}$.

2. Para $n, k > 0$, $S(n, 0) = S(0, k) = 0$.
3. Para todo $k > n$, $S(n, k) = 0$.
4. Para todo $n > 1$, $S(n, n-1) = n$.

Proposición 35. *Los números* $\left(\quad S(n,k) \quad \right)_{n,k\geq 0}$ *están definidos por la siguiente recurrencia:*

$$\forall k, n \geq 1 : \ S(n,k) = kS(n-1,k) + S(n-1,k-1).$$

con valores de borde, $S(0,0) = 1$, $S(n,0) = S(0,k) = 0$ *para* $n, k \geq 1$.

Demostración. Sea A el conjunto de las particiones de $\mathcal{P}(n,k)$ donde $\{n\}$ es un bloque en sí mismo y $B = \mathcal{P}(n,k) \setminus A$. Claramente A está en biyección con $\mathcal{P}(n-1,k-1)$ (borrando el bloque $\{n\}$). Además, hay una función k a 1 desde B hasta $\mathcal{P}(n,k+1)$ (dada por la operación "borrar n de su bloque"). □

La siguiente propiedad relaciona las particiones no ordenadas con las particiones ordenadas

Proposición 36. *El número de particiones ordenadas de* n *en* k *bloques es* $k!S(n,k)$.

Demostración. Cada partición ordenada de $[n]$ en k bloques se obtiene tomando una partición (normal) en $\mathcal{P}(n,k)$ y luego ordenando las k partes. □

En particular, concluimos la siguiente importante propiedad:

Proposición 37. *El número de funciones sobreyectivas de* $[n] \to [k]$ *es* $k!S(n,k)$.

Demostración. Cada función f sobreyectiva se puede ver como $(f^{-1}(1), \ldots, f^{-1}(k))$ que es una partición ordenada de $[n]$ en k bloques. □

Discutamos un poco más las particiones de $[n]$.

Definición 29. Llamamos $B(n)$ al número total de particiones de $[n]$. Los números $(B(n))_{n\in\mathbb{N}}$ se conocen como números de Bell

Tenemos $B(0) = 1$ y $B(n) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)$. La siguiente proposición nos da otra recurrencia para calcular $B(n)$.

Proposición 38. *Los números* $B(n)_{n\geq 0}$ *estan definidos por la siguiente recurrencia:*

$$\forall n \geq 1 : \ B(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B(k).$$

con valor de borde $B(0) = 1$.

Demostración. Propuesta. □

Formas de barajar un mazo

Tenemos un mazo ordenado con n cartas distintas (mazo es $[n]$). Realicemos el siguiente proceso tomemos la primera carta de la baraja y ubiquémosla en una posición al azar (uniformemente) dentro del mazo (notar que con probabilidad $1/n$ el mazo queda ordenado). Repitamos el proceso anterior t veces. ¿Cuál es la probabilidad que el mazo resultante quede ordenado?
Para entender un poco la respuesta, codifiquemos los experimentos *al revés* del siguiente modo. Pensemos que el tiempo va hacia atrás y que partimos del mazo ordenado. En cada jugada tomamos una carta del mazo y la ubicamos al principio del mazo. Llamemos s_i a la etiqueta (la cara) de la carta que es movida hacia el principio en el i-ésimo paso.
Por ejemplo, si $n = 4$ y la $s = (2, 1, 2, 3)$ entonces la secuencia de mazos es la siguiente

1234	mazo ordenado
2134	$s_1 = 2$
1234	$s_2 = 1$
2134	$s_3 = 2$
3214	$s_4 = 3$

¿Cuántas secuencias s dejan el mazo ordenado?
Notamos que cada secuencia s define naturalmente una partición $\varphi(s)$ de $[t]$ tomando como conjuntos (sin etiquetar) aquellos indices donde se levantan cartas iguales. Por ejemplo, tanto $(2,1,2,3)$ como $(3,1,3,2)$ definen la partición $\{1,3\},\{2\},\{4\}$, $(4,4,4,4)$ define la partición $\{1,2,3,\}$, etc.
Si llamamos $\mathcal{P}(t,\leq n)$ al conjunto de particiones de $[t]$ en a lo más n partes, la función anterior mapea secuencias de $[n]^t$ en particiones en $\mathcal{P}(t,\leq n)$ pero no de manera inyectiva.
Veamos que si restringimos esta función a aquellas secuencias que dejan el mapa ordenado, entonces la función es biyectiva. Es decir $|\{\text{Secuencias de largo } t \text{ que dejan el mazo ordenado}\}| = |\mathcal{P}(t,\leq n)|$.
En efecto, tomemos una partición no ordenada Q de $[t]$ en a lo más n partes. Notemos que para que el mazo quede ordenado, la última carta levantada (la t-ésima) debe ser un 1. En particular la parte x_1 de Q que contiene a t debe provenir de un 1. Creemos entonces la secuencia $s(Q)$ que contiene 1 en los índices de x_1. Notemos ahora que la última carta levantada que no está en x_1 debe ser un 2. De aquí deducimos que la parte x_2 que contiene al índice mayor que no está en x_1 debe provenir con un 2. Por lo tanto en $s(Q)$ los índices de x_2 deben tener un 2. Sucesivamente notamos que la última carta levantada que no está en $\bigcup_{i=1}^{k} x_i$ debe ser un $k+1$, por lo que podemos definir x_{k+1} como la parte que contiene al mayor índice que no está en $\bigcup_{i=1}^{k} x_i$. Una vez que todas las partes estén etiquetadas, concluimos que la secuencia $s(Q)$ que contiene i en los índices de x_i es la única secuencia s que ordena el mazo tal que $\varphi(s) = Q$.
Concluimos que el número de secuencias de largo t que ordenan el mazo es igual a $\sum_{i=0}^{n} S(t,i)$, y en particular la probabilidad de que una secuencia al azar de largo n ordene el mazo es $B(n)/n^n$.

Definición 30. Llamamos $T(n)$ al número total de particiones ordenadas de $[n]$. Los números $(T(n))_{n\in\mathbb{N}}$ se conocen como números ordenados de Bell o números de Fubini.

Observamos que

$$T(n) = \sum_{k=0}^{n} k! S(n,k).$$

Resultados de una carrera con empates

¿De cuántas formas puede terminar una carrera de n caballos si pueden haber empates (varios que llegan al mismo tiempo)?
Exactamente de $T(n)$ maneras (número de Fubini).

Clase 4

1. Las doce formas de repartir n pelotas en k cajas.

Queremos estudiar las maneras de repartir n pelotas en k cajas. Lo que hace el problema interesante es si las pelotas son todas iguales o no (distinguibles o indistinguibles), si las cajas son distinguibles o indistinguibles, y si imponemos alguna condición sobre la asignación. Las tres condiciones más interesantes son si la asignación es libre (irrestricta), sobreyectiva (en cada caja hay al menos una pelota) o inyectiva (en cada caja hay a lo más una pelota).
Con lo que llevamos estudiado en el curso podemos llenar la siguiente tabla.

Libre	Pelotas distintas	Pelotas iguales
Cajas distintas	k^n (k-secuencias de $[n]$, funciones)	$\text{wcom}(n,k) = \left(\binom{k}{n}\right) = \binom{n+k-1}{n}$ (composiciones débiles de n en k partes)
Cajas iguales	$\sum_{i=0}^{k} S(n,i)$ (particiones de $[n]$ en a lo más k bloques)	$\sum_{i=0}^{k} p_i(n)$ (particiones de n en a lo más k partes)

Sobreyectiva	Pelotas distintas	Pelotas iguales
Cajas distintas	$S(n,k)k!$ (funciones sobreyectivas)	$\text{com}(n,k) = \binom{n-1}{n-k}$ (composiciones de n en k partes)
Cajas iguales	$S(n,k)$ (particiones de $[n]$ en k bloques)	$p_k(n)$ (particiones de n en k partes)

Inyectiva	Pelotas distintas	Pelotas iguales
Cajas distintas	$k^{\underline{n}}$ (funciones inyectivas)	$\binom{k}{n}$ (elegir las n cajas con 1 pelota)
Cajas iguales	$[\![n \leq k]\!]$ (todas son iguales)	$[\![n \leq k]\!]$ (todas son iguales)

Observación 11. Muchas de las expresiones anteriores se simplifican cuando $n = k$.

Libre	Pelotas distintas	Pelotas iguales
Cajas distintas	n^n	$\binom{2n-1}{n}$
Cajas iguales	$B(n)$	$p(n)$

Inyectiva=Sobreyectiva	Pelotas distintas	Pelotas iguales
Cajas distintas	$n!$	1
Cajas iguales	1	1

También tiene sentido hacerse otras preguntas. Las siguientes quedan propuestas (en cada una hay que considerar los 4 casos de distinguibilidad).
¿Cuántas formas de repartir n pelotas en (un número arbitrario) de cajas de manera sobreyectiva?
¿Cuántas formas de repartir (un número arbitrario) de pelotas en k cajas de manera inyectiva?

2. Permutaciones y ciclos

En esta sección estudiaremos un poco más las permutaciones de $[n]$.

Definición 31. Decimos que $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ es un **ciclo** de $\pi \in \mathcal{S}_n$ si $\pi(a_1) = a_2$, $\pi(a_2) = a_3, \ldots$, $\pi(a_k) = a_1$.

Sea $\pi \in \mathcal{S}_n$. Es fácil ver que cada elemento $i \in [n]$ pertenece a exactamente un ciclo de π. Esta observación nos dice que cada permutación está definida por sus ciclos.

Definición 32. Las permutaciones de $\mathcal{S}_n$ que contienen un solo ciclo se conocen como *permutaciones circulares*

Proposición 39. *Sea $n \geq 1$. El número de permutaciones circulares de $\mathcal{S}_n$ es $(n-1)!$.*

Demostración. Sea $\mathcal{C}(n,1)$ el conjunto de todas las permutaciones circulares de $\mathcal{S}_n$. Consideremos la función

$$\begin{aligned} \varphi &\colon \mathcal{S}_n \to \mathcal{C}(n,1) \\ \varphi(\pi) &= (\pi_1, \ldots, \pi_n) \end{aligned}$$

La función φ no es inyectiva. Notamos que para cada $(\tau) := (\tau_1, \ldots, \tau_n) \in \mathcal{C}(n,1)$, las únicas palabras π tal que $\varphi(\pi)$ es igual a τ son *rotaciones* de la palabra $\tau_1 \ldots \tau_n$. De aquí se concluye que $|\varphi^{-1}((\tau))| = n$, y usando que $\mathcal{S}_n = \bigcup_{(\tau)\in C(n,1)} \varphi^{-1}((\tau))$ se deduce que $n! = |\mathcal{C}(n,1)|n$, es decir, $|\mathcal{C}(n,1)| = (n-1)!$. □

Consideremos ahora el siguiente problema: Sean $c_1, c_2, \ldots, c_n$ números naturales. ¿De cuántas formas podemos ubicar $n = \sum_{i=1}^{k} ic_i$ personas en c_1 mesas redondas para 1 persona, c_2 mesas redondas para dos personas, etc.; donde dos configuraciones se consideran iguales si en ambas configuraciones cada persona tiene el mismo vecino a su derecha y el mismo vecino a la izquierda? En el lenguaje de permutaciones, lo que estamos preguntando es cuantas permutaciones tienen exactamente c_i ciclos de tamaño i para cada $i \in [n]$.

Definición 33. El **tipo** de una permutación $\pi \in \mathcal{S}_n$ es el vector $(m_1, \ldots, m_n)$ donde m_i es la cantidad de ciclos de tamaño i en π.
Notar que directamente se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} im_i = n.$$

Proposición 40. *El número de permutaciones de tipo $m = (m_1, \ldots, m_n)$ es*

$$\frac{n!}{m_1! \cdots m_n!} \frac{1}{1^{m_1} 2^{m_2} \cdots n^{m_n}}.$$

Demostración. Daremos dos demostraciones de este hecho. Sea $\mathcal{S}(m)$ el conjunto de permutaciones de tipo m. En la primera demostración codificamos cada permutación π como

$$\pi = \underbrace{(*)\cdots(*)}_{m_1}\underbrace{(*,*)\cdots(*,*)}_{m_2}\cdots\underbrace{(*,\ldots,*)\cdots(*,\ldots,*)}_{m_n}, \tag{4.1}$$

donde los paréntesis codifican los ciclos de π. Si reemplazamos los asteriscos por una palabra $w \in \mathcal{S}_n = ([n])_n$ obtenemos una permutación $\varphi(w)$ con el tipo deseado. Sin embargo cada permutación puede provenir de varias palabras. De esta forma

$$\mathcal{S}_n = \bigcup_{\pi\in\mathcal{S}(m)} \varphi^{-1}(\pi).$$

Calculemos $|\varphi^{-1}(\pi)|$. Notemos que si permutamos los ciclos de largo i de w entre si obtenemos la misma permutación. Esta operación se puede hacer de $m_1!m_2!\ldots m_n!$ maneras. Finalmente, podemos *rotar* cada ciclo individual decidiendo quien es su primer elemento $(1325) = (3251) = (2513) = (5132)$. Esto se puede hacer para cada ciclo de largo i de i maneras. Esto muestra que $|\varphi^{-1}(\pi)| = (m_1!m_2!\cdots m_n!) \cdot 1^{m_1} 2^{m_2} \cdots n^{m_n}$.
De la fórmula arriba se obtiene que $n! = (m_1!m_2!\cdots m_n!) \cdot 1^{m_1} 2^{m_2} \cdots n^{m_n} \cdot |\mathcal{S}(m)|$, lo que prueba lo pedido.
En la segunda demostración notamos que cada permutación de tipo m se puede obtener seleccionando primero una partición de tipo m y luego eligiendo una permutación circular de cada uno de sus bloques. Sea $a = (a_1, \ldots, a_k)$ la

partición de n asociada al vector de multiplicidades m, es decir a_1 es el tamaño del bloque más grande, a_2 es el siguiente y así sucesivamente. Lo anterior nos dice que

$$\begin{aligned}|\mathcal{S}(m)| &= \binom{n}{a_1,\ldots,a_k}\frac{1}{m_1!\cdots m_n!}\cdot(a_1-1)!\cdots(a_k-1)!\\ &= \frac{n!}{m_1!\cdots m_n!}\frac{1}{a_1\cdots a_k} = \frac{n!}{m_1!\cdots m_n!}\frac{1}{1^{m_1}2^{m_2}\cdots n^{m_n}}.\end{aligned}$$

□

Estudiemos un poco más las permutaciones con un número fijo de ciclos.

Definición 34. Sea $\mathcal{C}(n,k)$ el conjunto de permutaciones de $[n]$ con k ciclos.

Definición 35. Números de Stirling sin signo.
Llamamos $\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}$ (algunos autores usan $c(n,k)$) al conjunto de permutaciones en $\mathcal{S}_n$ con exactamente k ciclos. La familia $\left(\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\right)_{n,k\in\mathbb{N}}$ se conoce como números de Stirling sin signo.

Definición 36. Números de Stirling del primer tipo. Los valores $s(n,k) = (-1)^{n-k}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}$ se conocen como números de Stirling del primer tipo.

Al igual que con los números de Stirling del segundo tipo, estos números no son necesariamente simples de calcular.

Observación 12. Se cumple que:

1. Para todo $n\in\mathbb{N}$, $\begin{bmatrix}n\\n\end{bmatrix} = 1$.
2. Para $n,k>0$, $\begin{bmatrix}n\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\k\end{bmatrix} = 0$.
3. Para todo $k>n$, $\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} = 0$.
4. Para todo $n>1$, $\begin{bmatrix}n\\n-1\end{bmatrix} = \binom{n}{2}$.

La siguiente recurrencia define los números de Stirling sin signo.

Proposición 41. *Los números* $\left(\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\right)_{n,k\geq 0}$ *están definidos por la siguiente recurrencia:*

$$\forall n,k\geq 1:\ \begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}n-1\\k-1\end{bmatrix}$$

con valores de borde, $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = 1$, $\begin{bmatrix}n\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\k\end{bmatrix} = 0$ *para* $n,k\geq 1$.

Demostración. Sea A el conjunto de de permutaciones en $\mathcal{C}(n+1,k+1)$ donde $n+1$ es un ciclo en si mismo y $B = \mathcal{C}(n+1,k+1)\setminus A$.
Para cada permutación $\pi\in\mathcal{C}(n+1,k+1)$, definamos $\varphi(\pi)$ como la permutación obtenida de eliminar el símbolo $n+1$ del ciclo en el que está. Notemos que $\varphi(\pi)$ tiene k ciclos (si $\pi\in A$) o $k+1$ ciclos (si $\pi\in B$). Es fácil ver que $\varphi\colon A\to\mathcal{C}(n,k)$ es biyectiva. Por otro lado, cada $\tau\in\mathcal{C}(n,k+1)$ puede provenir de varias permutaciones en $\mathcal{C}(n+1,k+1)$. ¿De cuántas? Si τ está escrita como una lista de ciclos en orden entonces podemos insertar $n+1$ en n lugares: justo antes de cada símbolo. De aquí se tiene que $\varphi\colon B\to\mathcal{C}(n,k+1)$ es una función n a 1 (i.e. $|\varphi^{-1}(\tau)| = n$). Con esto $|\mathcal{C}(n+1,k+1)| = |A|+|B| = |\mathcal{C}(n,k)| + n|\mathcal{C}(n,k+1)|$. □

Clase 5

1. Principio de Inclusión-Exclusión

El principio de Inclusión-Exclusión es una extensión del principio de la suma aplicado a conjuntos que no son necesariamente disjuntos. En lo que sigue sean $A_1, \ldots, A_n$ una secuencia de conjuntos finito. Para todo $I \subseteq [n]$, llamemos A_I al conjunto $\bigcap_{i\in I} A_i$, donde interpretamos $A_\emptyset$ como $\bigcup_{i=1}^n A_i$.

Teorema 42 (Principio de Inclusión-Exclusión)**.**

$$0 = \sum_{I\subseteq[n]} (-1)^{|I|}|A_I|.$$

En particular,

$$\begin{aligned}|\bigcup_{i=1}^n A_i| &= \sum_{\emptyset\neq I\subseteq[n]} (-1)^{|I|+1}|A_I| \\ &= |A_1| + \cdots + |A_n| - |A_1\cap A_2| - \cdots - |A_{n-1}\cap A_n| + |A_1\cap A_2\cap A_3| + \ldots\end{aligned}$$

Demostración. Probaremos algo un poco más general. Veamos que para todo x,

$$0 = \sum_{I\subseteq[n]} (-1)^{|I|}[\![x \in A_I]\!].$$

Si sumamos la expresión anterior sobre todos los posibles $x \in A_\emptyset$ tendremos la igualdad que queremos probar. Sea x elemento cualquiera, y sea $I(x) = \{i \in [n] \colon x \in A_i\}$ los índices de los conjuntos que contienen a x. Notar que para $I \neq \emptyset$, $x \in A_I$ si y solo si $I \subseteq I(x)$. Con esto tenemos que la expresión de la derecha es

$$\begin{aligned}(-1)^{|\emptyset|}[\![x \in A_\emptyset]\!] + \sum_{\emptyset\subsetneq I\subseteq[n]} (-1)^{|I|}[\![I \subseteq I(x)]\!] &= [\![x \in A_\emptyset]\!] + \sum_{\emptyset\neq I\subseteq I(x)} (-1)^{|I|} \\ &= [\![x \in A_\emptyset]\!] - 1 + \sum_{j=0}^{|I(x)|} \sum_{I\in\binom{I(x)}{j}} (-1)^{|I|} \\ &= [\![x \in A_\emptyset]\!] - 1 + \sum_{j=0}^{|I(x)|} (-1)^j \binom{|I(x)|}{j} \\ &= [\![x \in A_\emptyset]\!] - 1 + (-1+1)^{|I(x)|},\end{aligned}$$

donde la última igualdad viene del teorema del binomio.
Para concluir, notamos que si $x \in A_\emptyset$, entonces $I(x) \neq \emptyset$ y luego la expresión de arriba se evalúa a $1 - 1 + 0 = 0$. Por otro lado, si $x \notin A_\emptyset$ entonces $0^{|I(x)|} = 0^0 = 1$ y luego la expresión de arriba se evalúa a $0 - 1 + 1 = 0$. □

Es fácil extender la demostración anterior a contextos más generales como lo muestra las siguientes proposiciones.

Proposición 43. *Sean $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos finitos y $w \colon X = \bigcup_{i=1}^n A_i \to G$, donde $(G, +)$ es un grupo abeliano. Para todo $Y \subseteq X$, llame $w(Y) = \sum_{x\in Y} w(x)$ donde la suma es la operación de G. Entonces:*

$$w(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{\emptyset\neq I\subseteq[n]} (-1)^{|I|+1} w(A_I),$$

donde para todo $g \in G$, $(-1)g = -g$ es el inverso aditivo de g en G.

Proposición 44. *Sean $A_1, \dots, A_n$ eventos en un espacio de probabilidad, luego*

$$\Pr(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} \Pr(A_I).$$

Demostración de las proposiciones 43 y 44. Anteriormente demostramos que

$$0 = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} [\![x \in A_I]\!]. \tag{5.1}$$

donde $A_\emptyset = X$. Para todo $x \in X$, el lado izquierdo vale 0. Luego, podemos multiplicar por $w(x)$ para $x \in X$, la igualdad anterior. Sumando sobre $x \in X$ se tiene

$$0 = \sum_{x \in X} \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} [\![x \in A_I]\!] w(x) = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \sum_{x \in X} [\![x \in A_I]\!] w(x) = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \sum_{x \in X} w(A_I),$$

lo que concluye la demostración de la primera proposición.
Para la segunda proposición basta integrar (5.1) sobre todo x en $A_\emptyset$.

$$0 = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \Pr(A_I). \quad \square$$

Veamos un ejemplo de uso del Principio de Inclusión y Exclusión (PIE).

Ejercicio resuelto 45. Sean $p_1, \dots, p_k$ primos y $n \in \mathbb{N}$. Contar el conjunto de elementos menores que n que no son múltiplos de ningún p_i.

Definamos A_i como el conjunto de multiplos de p_i en $[n]$. Luego lo pedido es exactamente $n - |\bigcup_{i \in [k]} A_k|$. Aplicando el PIE tenemos que esto es igual a

$$n - \sum_{I \subseteq [k]} (-1)^{|I|+1} |A_I| = n + \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [k]} (-1)^{|I|} \left\lfloor \frac{n}{\prod_{i \in I} p_i} \right\rfloor.$$

Por ejemplo si queremos contar los elementos menores que 10000 que no son multiplos de 2, 3 ni 5 obtenemos

$$\begin{aligned} 10000 - \lfloor 10000/2 \rfloor - \lfloor 10000/3 \rfloor \lfloor 10000/5 \rfloor + \lfloor 10000/6 \rfloor + \lfloor 10000/10 \rfloor + \lfloor 10000/15 \rfloor - \lfloor 10000/30 \rfloor \\ = 10000 - 5000 - 3333 - 2000 + 1666 + 1000 + 666 - 333 = 2666. \end{aligned}$$

Un corolario simpático es que si llamamos $f(n; p_1, \dots, p_k)$ como la proporción de elementos en $[n]$ que no son múltiplos de p_i satisface

$$\lim_{n \to \infty} f(n; p_1, \dots, p_k) = 1 + \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [k]} (-1)^{|I|} \frac{1}{\prod_{i \in I} p_i} = \sum_{I \subseteq [k]} \prod_{i \in I} \frac{-1}{p_i} \prod_{i \in [k] \setminus I} 1 = \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Notemos que si n es suficientemente grande y elegimos un número $i \in [n]$ uniformemente al azar, la probabilidad de que ese número no sea múltiplo de p_i es esencialmente $1 - 1/p_i$. La fórmula recién descrita nos dice que los eventos "no ser múltiplo de p_i" son esencialmente independientes. Por otro lado, notemos que el estimado es bastante útil incluso para valores relativamente pequeños de n. Por ejemplo para el caso de $(2, 3, 5)$ tenemos que la proporción es $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15} = 0{,}2666\dots$ Como se ve del ejemplo anterior, muchas veces lo que deseamos es contar los objetos que NO pertenecen a la unión de ciertos conjuntos, por lo cual la siguiente versión del P.I.E. aparece con frecuencia.

Proposición 46. *Sean $A_1, \dots, A_n$ subconjuntos finitos de un universo E. Entonces*

$$|A_1^c \cap \dots \cap A_n^c| = |E| + \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} |A_I|.$$

Demostración. Basta notar que $A_1^c \cap \dots \cap A_n^c = (A_1 \cup \dots A_n)^c = E \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, y usar el P.I.E. $\square$

Veamos otra aplicación del P.I.E: una fórmula exacta para los números de Stirling del segundo tipo.

Proposición 47.

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i(k-i)^n.$$

Demostración. Recordemos que $k!S(n,k)$ es la cantidad de funciones sobreyectivas de $[n]$ a $[k]$. Llamemos A_i al conjunto de funciones f de $[n]$ a $[k]$ tal que $f^{-1}(i) = \emptyset$. Con esto $k!S(n,k) = k^n - |\bigcup_{i=1}^n A_i|$. Al igual que en el caso anterior llamemos $A_I = \bigcap_{i\in I} A_i$. En este caso A_I es el conjunto de funciones $f\colon [n] \to [k]$ tal que ningún elemento de I tiene preimagen. Es decir A_I son las funciones de $[n] \to [k] \setminus I$ y luego $|A_I| = (k - |I|)^n$. El P.I.E. nos dice que

$$\begin{aligned} k!S(n,k) &= k^n + \sum_{i=1}^{n}\sum_{I\in\binom{[k]}{i}}(-1)^i|A_I| \\ &= k^n + \sum_{i=1}^{n}\binom{k}{i}(-1)^i(k-i)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{k}{i}(-1)^i(k-i)^n. \end{aligned}$$

□

Otra consecuencia interesante es el siguiente resultado.
Desarreglos: Son las permutaciones tal que $\pi(i) \neq i$ para todo i. ¿Cuántos desarreglos hay en $\mathcal{S}_n$? Llamemos D_n a dicha cantidad.
Llamemos $Q_i = \{x \in \mathcal{S}_n\colon x_i = i\}$. Entonces lo que queremos contar es $|\bigcup_{i=1}^n Q_i^c|$ donde el complemento es respecto a $\mathcal{S}_n$. Sea $Q_I = \bigcap_{i\in I} Q_i$. Luego Q_I son las permutaciones que dejan fijas los elementos de I y dejan libres el resto. Hay exactamente $(n - |I|)!$ de esas.
Luego,

$$\begin{aligned} D_n &= n! + \sum_{\emptyset\neq I\subseteq[n]}(-1)^{|I|}|Q_I| \\ &= n! + \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i(n-i)! = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{n!}{i!} \end{aligned}$$

Curiosamente, notamos que la fracción $D_n/|\mathcal{S}_n|$ es una secuencia convergente y su límite cuando n tiende a infinito es igual a $\sum_{i\geq 0}(-1)^i\frac{1}{i!} = e^{-1}$, lo que dice que la probabilidad de que al tomar una permutación al azar, esta sea un desarreglo tiende a $1/e \approx 0{,}3678$

2. Sumas alternantes. Método de DIE

El método de la involución con signo, también llamado método DIE permite probar identidades de la forma

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k = b_n$$

DIE es un acrónimo para descripción, involución excepción. También se conoce como método de la involución con signo. La idea general es la siguiente.

(D) Describir un conjunto de objetos que sean contados por la suma si ignoramos el signo.

(I) Encontrar una involución (biyección autoinversa) entre los objetos contados positivamente y aquellos contados negativamente. En otras palabras encontrar un emparejamiento entre objetos positivos y objetos negativos. Si no se puede encontrar esta involución, encontrar una que *empareje* la mayor cantidad de objetos posibles. Los objetos emparejados no aportan a la suma.

(E) Los objetos no emparejados son excepciones. Estos se cuentan por separado (respetando su signo).

Demos un par de ejemplos

Ejemplo 48. Calcule:

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

A pesar de que el lado derecho es una expresión conocida (¡Teorema del Binomio!) es un excelente ejemplo para probar el método:

(D) La cantidad $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ cuenta los subconjuntos de $[n]$, donde $\binom{n}{k}$ corresponde a los conjuntos de tamaño k.

(I) La idea es encontrar una involución entre conjuntos con k par y aquellos con k impar. Basta tomar la función $X \mapsto X\Delta\{1\}$ como involución.

(E) La única excepción es si $1 \notin [n]$. Es decir, si $n = 0$. En este caso, la involución anterior no está definida. Cuando $n = 0$, la suma A_0 vale 1.

Con esto $\sum_{k\text{par}} \binom{n}{k} - \sum_{k\text{impar}} \binom{n}{k} = [\![n = 0]\!]$.

Ejemplo 49. Calcule para $0 \leq m \leq n$

$$B(n, m) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{m}$$

(D) El término $\binom{n}{k}\binom{k}{m}$ cuenta las maneras de elegir algunos (k) elementos de $[n]$ y luego destacar exactamente m de ellos. En otras palabras cuenta los pares ordenados (X, Y) tal que $\emptyset \subseteq X \subseteq Y \subseteq n$, con $|X| = m$ (su signo depende de la paridad de $k := |Y|$)

(I) Queremos mandar $X \subseteq Y$, a $X' \subseteq Y'$ donde $|Y'|$ tiene distinta paridad que $|Y|$. Una forma de hacerlo es igual que antes tomar $(X, Y) \mapsto (X, Y\Delta\{a\})$ donde a es el elemento más pequeño de $[n]$ que no está en X.

(E) La involución anterior funciona excepto si a no existe. En dicho caso, $|X| = n$ y luego necesitamos que $m = n$. Luego, la suma tiene un solo elemento de valor $(-1)^n$.

Por lo tanto, $B(n, m) = (-1)^n [\![n > m \geq 0]\!]$.

Ejemplo 50. Calcule para $0 \leq m \leq n$

$$C(n, m) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left(\!\!\binom{k}{m}\!\!\right)$$

(D) El término $\binom{n}{k}\left(\!\!\binom{k}{m}\!\!\right)$ cuenta las maneras de elegir k personas de entre n y luego que estas k personas reciban m votos en total (algunas personas pueden recibir 0, 2 o mas). En otras palabras estamos eligiendo un conjunto B de tamaño k y luego un multiconjunto A de B, de tamaño m.

(I) Sea (A, B) el par multiconjunto, conjunto. Tomemos a el elemento más pequeño de $[n]$ que no está en A, luego usemos el mapa $(A, B) \mapsto (A, B\Delta\{x\})$. Esto es una involución

(E) Lo anterior está definido excepto para aquellos pares (A, B) donde $B = [n]$ y además A contiene al menos una copia de cada elemento de B. Estos se cuentan aparte. Hay exactamente $\left(\!\!\binom{n}{m-n}\!\!\right)$ maneras de elegir pares (A, B) que satisfagan esto.

Con esto tenemos que $C(n, m) = (-1)^n \left(\!\!\binom{n}{m-n}\!\!\right)$.
Veamos un último ejemplo (dado en auxiliar)

Ejemplo 51. Calcule

$$\sum_{k=1}^{n} f_{k+1}(-1)^k$$

donde f_n es el n-esimo número de Fibonacci.

Recordemos que f_n es el número de formas de cubrir con dominos y monominos un tablero de largo $n-1$. Para fijar ideas, escribamos t_{n-1} en vez de f_n. Luego la suma es

$$\sum_{k=1}^{n} t_k(-1)^{k+1}$$

(D) t_k cuenta formas de cubrir con dominos y monominos un tablero de largo k.

(I) Consideremos el tablero obtenido al cambiar la ultima ficha: si esta es un domino por un monomino y viceversa (esto cambia el largo en 1).

(D) Lo anterior se puede hacer excepto si $k = n$ y la ultima ficha es un monomino, ya que el tablero resultante tiene largo $n+1$. Hay exactamente t_{n-1} excepciones, todas con signo $(-1)^n$.

Luego la suma vale $(-1)^n t_{n-1} = (-1)^n f_n$

Clase 6

1. Polinomios y series formales.

Normalmente podemos codificar un problema de conteo parametrizado por un número natural, mediante una **sucesión**. Por ejemplo, las siguientes sucesiones, a, b y c son las **sucesiones** asociadas a la cardinalidad de $[n]$, al número de permutaciones de $[n]$ y al número de subconjuntos de tamaño n de un conjunto fijo de tamaño 3:

$$\begin{aligned} a &= (0,1,2,3,\dots,n,\dots) & a_n &= n, \\ b &= (1,1,2,6,\dots,n!,\dots) & b_n &= n!, \\ c &= (1,3,3,1,0,\dots) & c_n &= \binom{3}{n}. \end{aligned}$$

En el caso que una sucesión tenga sólo un número finito de valores no nulos, es costumbre cortar la sucesión en el último término distinto de 0. En este caso decimos que la sucesión es finita. Por ejemplo, la sucesión c definida antes se escribe $c = (1,3,3,1)$. La sucesión constante igual a 0, se puede escribir como (0) o como $()$. En este caso decimos que c es una sucesión finita.

Definición 37. El conjunto de todas las sucesiones es $\mathbb{C}^{\mathbb{N}} = \{a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}\}$. El conjunto de todas las sucesiones finitas es $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}^0 \cup \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{C}^{[n]\cup\{0\}}$. El grado[1] de una sucesión $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ es el máximo n tal que $a_n \neq 0$. Si a no es finita entonces decimos que tiene grado infinito. Denotamos el grado de a como $\deg(a)$. El grado de la sucesión $0 \in \mathbb{C}^0$ se define como $-\infty$.

A toda sucesión s de grado $k \leq +\infty$ le podemos asociar un **polinomio** a coeficientes complejos, $F_s(x) = \sum_{i=0}^{k} s_i x^i$ de grado k (usando la notación estándar de grado de polinomio donde el grado del polinomio 0 es $-\infty$ y el grado de un polinomio no nulo es la mayor potencia de x que aparece con coeficiente no nulo). Por ejemplo la sucesión $c = (1,3,3,1)$ de grado 3 se puede identificar con el polinomio $1 + 3x + 3x^2 + x^3$, el que podemos escribir compactamente usando el producto estándar de polinomios como $(1+x)^3$. Extendemos esta notación a secuencias infinitas de la siguiente manera.

Definición 38. (**Función generatriz ordinaria**). Dada una variable indeterminada x, y una sucesión $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, llamamos **función generatriz ordinaria** (FGO) asociada a a a la serie formal

$$F_a(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n.$$

También escribiremos FGO(a)=$F_a(x)$

Definición 39. Denotamos por $\mathbb{C}[[x]]$ al conjunto de FGO a coeficientes complejos, con indeterminada x y por $\mathbb{C}[x]$ al conjunto de FGO de sucesiones finitas. Los objetos en $\mathbb{C}[[x]]$ se llaman *series formales*. Los objetos en $\mathbb{C}[x]$ se llaman *polinomios formales*

Notamos que por definición $\mathbb{C}[x] \subseteq \mathbb{C}[[x]]$. Una advertencia importante. Las series formales están definida como un concepto algebraico (abstracto), no como un concepto analítico donde tenga sentido *evaluar*. Por ejemplo, para la sucesión b definida al principio del capítulo, $F_b(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} n! x^n$. Esta expresión, vista como función de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ sólo converge si $x = 0$: $F_b(0) = 1$.
Lo mismo pasa con la expresión $G(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (2n)! x^n$. Es decir, F_b y G son iguales como funciones pero nosotros las consideraremos como objetos distintos pues tienen distintos coeficientes.
La siguiente notación será util para aclarar esto.

[1] Esta definición no es estándar, pero su uso se justifica en el siguiente párrafo.

Definición 40. Dada una serie formal $F(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ y un número $k \in \mathbb{N}$, denotamos por $[x^k]F(x)$ al coeficiente asociado a x^k.

Por ejemplo, si $F(x)$ es la FGO de la secuencia f, entonces $[x^k]F(x) = f_k$.

Definición 41. Dos elementos $F, G \in \mathbb{C}[[x]]$ son iguales si y solo si $[x^k]F(x) = [x^k]G[x]$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Definición 42. La sucesión asociada a $F \in \mathbb{C}[[x]]$ es la sucesión $s(F) = ([x^k]F(x))_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Es decir, la única sucesión tal que F es FGO de s.

Definición 43. A pesar que no evaluaremos simbólicamente $F(x)$, denotamos por conveniencia $F(0) = [x^0]F(x)$.

En otras palabras (hasta ahora) una FGO no es más que otra forma de expresar sucesiones. Desde el punto de vista de la combinatoria, las series formales más interesantes son las FGO de secuencias asociadas a las secuencias que cuentan la cardinalidad de familias de conjuntos (en particular, todos los coeficientes son números naturales).
Como ya dijimos, normalmente no veremos las series formales como funciones sino como objetos abstractos sobre los cuales podemos hacer ciertas operaciones.

Definición 44. (**Operaciones sobre sucesiones y series formales**) Las siguientes operaciones unarias y binarias se definen en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ y en $\mathbb{C}[[x]]$. Sean a y b en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, y sus FGO asociadas $A(x)$ y $B(x)$. Sea además $\lambda \in \mathbb{C}$.

Operación	En secuencias	En FGO
Suma	$(a+b)_n = a_n + b_n$	$(A+B)(x) = \sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)x^n$.
Ponderación	$(\lambda a)_n = \lambda a_n$	$\lambda A(x) = \sum_{n\geq 0} \lambda a_n x^n$
Convolución/Producto	$(a \cdot b)_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$	$(AB)(x) = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n$
Escalamiento	$--$	$A(\lambda x) = \sum_{n>0} a_n \lambda^n x^n$.

Las operaciones de suma y producto en convierten a $\mathbb{C}[[x]]$ en un anillo conmutativo con unidad (el neutro del producto es el polinomio/serie 1) llamado el anillo de series formales. Similarmente $\mathbb{C}[x]$ es el anillo de polinomios formales. No solo eso, el hecho que exista ponderación, hace de $\mathbb{C}[[x]]$ y $\mathbb{C}[x]$ dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$.

Comentario 52. Es posible definir polinomios y series sobre cualquier anillo conmutativo con unidad R. El conjunto resultante no es un espacio vectorial necesariamente (para esto necesitamos que R sea un cuerpo), sino que solo anillos, llamados $R[x]$ y $R[[x]]$. Sus elementos son de la forma $p(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ con $a_n \in R$. Al igual que antes, dos series son iguales si y solo si todos sus coeficientes son iguales.

Antes de estudiar el anillo de series formales $\mathbb{C}[[x]]$ nos detendremos en el anillo de polinomios formales $\mathbb{C}[x]$.
Este anillo es particularmente agradable pues tenemos el siguiente operador de evaluación (podemos evaluar polinomios en complejos).
Para $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ polinomio de grado n con secuencia de coeficientes dada por p, podemos definir la función $P\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$P(c) = \sum_{i=0}^{n} p_i c^i.$$

Una propiedad importante que usaremos (sin demostrar) de algebra lineal es la siguiente:

Proposición 53. *Dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ son iguales (en $\mathbb{C}[x]$) si y solo si P y Q son iguales como funciones de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$. Más aún, si $P(x)$ y $Q(x)$ son de grado n, ellos son iguales (en $\mathbb{C}[x]$) si y solo si como funciones P y Q coinciden en al menos $n+1$ puntos distintos.*

Antes de terminar la sección de introducción, mencionamos que también podemos definir polinomios y series a varias variables como $\mathbb{C}[x, y] \subseteq \mathbb{C}[[x, y]]$ o en general $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_k] \subseteq \mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_k]]$.
En estos anillos las operaciones de suma y producto son análogas al caso univariado y similarmente, dos polinomios son iguales si y solo si el coeficiente que acompaña a cada posible monomio $x_1^{\alpha_1} \cdots x_k^{\alpha_k}$ son iguales.

2. Teoremas del binomio y multinomio

Comencemos con un resultado importante.

Proposición 54. *Teorema del binomio y del multinomio. Para todo $n \in \mathbb{N}$, se tienen las siguientes igualdades de polinomios.*

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}.$$

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{a \in \mathrm{WCOM}(n,k)} \binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_k^{a_k}.$$

Demostración. Notemos que

$$\sum_{a \in \mathrm{WCOM}(n,2)} \binom{n}{a_1, a_2} x^{a_1} y^{a_2} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i},$$

por lo que nos basta probar la segunda identidad. En efecto, sea el alfabeto $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$. Luego:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{y \in X^k} y_1 y_2 \ldots y_n = \sum_{(a_1,\ldots,a_k) \in \mathbb{N}^k} \sum_{\substack{y \in X^k: \\ y_1 y_2 \cdots y_n = x_1^{a_1} \cdots x_k^{a_k}}} x_1^{a_1} \cdots x_k^{a_k},$$

En la segunda suma interpretamos la igualdad $y_1 y_2 \cdots y_n = x_1^{a_1} \cdots x_k^{a_k}$ no como igualdad de palabras, sino como igualdad de producto de variables asociativas y conmutativas (por ejemplo, si los y_i y los x_j son números naturales entonces la igualdad es simplemente verificar que los productos en $\mathbb{N}$ son iguales).
Ahora bien, notemos que si $y \in X^k$, e $y_1 \cdots y_n = x_1^{a_1} \cdots x_k^{a_k}$, debemos tener que $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$, i.e. $a \in \mathrm{WCOM}(n,k)$. Con esto tenemos que:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{a \in \mathrm{WCOM}(n,k)} x_1^{a_1} \cdots x_k^{a_k} \cdot \left| \{ y \in X^n : \ y_1 y_2 \cdots y_n = x_1^{a_1} \cdots x_k^{a_k} \} \right|.$$

Para concluir, notemos que $\{y \in X^k : \ y_1 y_2 \cdots y_n = x_1^{a_1} \cdots x_k^{a_k}\} = \mathrm{Per}(x_1^{a_1} \cdots x_k^{a_k}) = \binom{n}{a_1, \ldots, a_k}$. □

3. Bases factoriales y números de Stirling

Recordamos que el *grado* de un polinomio $p(x) \in \mathbb{C}[x] \setminus \{0\}$ es el mayor entero i tal que el coeficiente que acompaña a x^i es distinto de 0. El grado del polinomio 0 es $-\infty$.

Definición 45. Definimos los siguientes polinomios de grado k:

$$x^{\underline{k}} := (x)_k := x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1). \qquad \binom{x}{k} := \frac{x^{\underline{k}}}{k!}.$$

$$x^{\overline{k}} := (x)^k := x(x+1)(x+2)\cdots(x+k-1). \qquad \left(\!\binom{x}{k}\!\right) := \frac{x^{\overline{k}}}{k!}.$$

Donde naturalmente definimos $x^{\underline{0}} = x^{\overline{0}}$ como el polinomio $x^0 = 1$.

Comentario 55. Las definiciones anteriores también tienen sentido en un anillo conmutativo abstracto R. Pero para ello, necesitamos definir objetos como 1, 2, etc. Aquí $1 := 1_R$ es el neutro multiplicativo de R, $2 = 1_R + 1_R$, y en general para $k \in \mathbb{N}$ es la suma de 1_R consigo mismo k veces. De este modo, $x^{\underline{k}}$ y $x^{\underline{k}}$ están bien definidos en la medida que R tenga unidad. Por otro lado, para que $\binom{x}{k}$ y $\left(\!\binom{x}{k}\!\right)$ tengan sentido, necesitamos que $k!$ sea invertible. Esto ocurre por ejemplo, si R es un cuerpo infinito.

Al evaluar los polinomios recién definidos en números naturales recuperamos los objetos que teníamos antes. Pero ahora se permite escribir cosas como

$$
\begin{aligned}
(-10)^{\overline{3}} &= (-10)(-9)(-8) = -720.\\
(1+i)^{\underline{3}} &= (1+i)i(i-1) = i(i^2-1) = 0.\\
\binom{-5}{2} &= \frac{(-5)(-6)}{2} = 15.\\
\left(\!\binom{-5}{2}\!\right) &= \frac{(-5)(-4)}{2} = 20.\\
\binom{-1/2}{k} &= \frac{(-1/2)(-3/2)(-5/2)\dots(-1/2-(k-1))}{k!} = \frac{(-1)\cdot(-3)\cdots(1-2k)}{2^k k!} = \frac{(-1)^k 1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^k k!}.\\
&= \frac{(-1)^k}{2^k k!}\frac{(2k-1)!}{2\cdot 4\cdots(2k-2)} = \frac{(-1)^k}{2^k k!}\frac{(2k-1)!}{2^{k-1}(k-1)!} = 2\left(\frac{-1}{4}\right)^k\binom{2k-1}{k}.
\end{aligned}
$$

Proposición 56. *Una propiedad interesante que será usada con cierta frecuencia es la siguiente. Para todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene las siguientes igualdades de polinomios en $\mathbb{C}[x]$,*

$$
\begin{aligned}
(-1)^k(-x)^{\underline{k}} &= x^{\overline{k}} = (x+k-1)^{\underline{k}}.\\
(-1)^k\binom{-x}{k} &= \left(\!\binom{x}{k}\!\right) = \binom{x+k-1}{k}.
\end{aligned}
$$

Demostración. Notamos que la segunda serie de igualdades se deduce de la primera dividiendo por $k!$. Para ver la primera basta notar que

$$(-1)^k(-x)^{\underline{k}} = (-1)^k(-x)(-x-1)\dots(-x-(k-1)) = x(x+1)\dots(x+k-1).$$

y que el lado derecho es, por definición igual a $x^{\overline{k}}$ y a $(x+k-1)^{\underline{k}}$. □

Recordemos que $\mathbb{C}[x]$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con base canónica $\{1, x, x^2, \dots\}$. Observamos además que $\{1, x^{\underline{1}}, x^{\underline{2}}, \dots, x^{\underline{n}}\}$ y $\{1, x^{\overline{1}}, x^{\overline{2}}, \dots, x^{\overline{n}}\}$ son dos bases del espacio generado por $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$. Una pregunta interesante resulta ser como expresar los polinomios anteriores en la base canónica de $\mathbb{C}[x]$, es decir como hacer un cambio de base.
Sorprendentemente, los números de Stirling que definimos en capítulos anteriores aparecerán de manera natural.

Proposición 57.

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k.$$

Demostración. Demostremos esta proposición por inducción, usando la recurrencia $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$ que se demostró anteriormente.
Para $n = 0$, tenemos que $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} x^0 = 1 = x^{\overline{0}}$. Por otro lado para $n \geq 0$,

$$
\begin{aligned}
x^{\overline{n+1}} = x^{\overline{n}}(x+n) &= \sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k(x+n)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n} n\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k\\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} x^k + \sum_{k=0}^{n} n\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k\\
&= \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} x^k + n\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} x^0\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} x^k,
\end{aligned}
$$

donde usamos que $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1 = \begin{bmatrix} n+1 \\ n+1 \end{bmatrix}$ y que $n\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0 = (n+1)\begin{bmatrix} n+1 \\ 0 \end{bmatrix}$. □

La proposición anterior dice que la matriz de coeficientes asociadas a los números de Stirling sin signo $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ es la matriz de cambio de base de la base de factoriales ascendientes a la base de monomios.

Proposición 58.

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k.$$

Demostración. Notemos que $x^{\underline{n}} = (-1)^n(-x)^{\overline{n}}$. Luego, aplicando la proposición anterior a $(-x)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} x^{\underline{n}} = (-1)^n(-x)^{\overline{n}} &= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-x)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-k} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k. \end{aligned}$$

□

Lo anterior dice que la matriz de números de Stirling del primer tipo $s(n,k)$ es la matriz de cambio de base de la base de factoriales descendientes a la base de monomios.

Observación: Gracias a las proposiciones anteriores tenemos demostraciones alternativas de ciertas igualdades que se pueden probar combinatorialmente (tomando $x = 1$):

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = n! \qquad \text{y} \qquad \sum_{k=0}^{n} s(n,k) = [\![n \in \{0,1\}]\!].$$

Proposición 59.

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)x^{\underline{k}}.$$

Demostración. Esta proposición se puede probar usando la recurrencia 35 e inducción. En vez de hacer eso, daremos una demostración "semicombinatorial". Probaremos que la igualdad de la propoxición 59 se tiene para todo x natural. Como dos polinomios en $\mathbb{C}[x]$ que son iguales en infinitos puntos son iguales como polinomios concluimos la igualdad. Notemos que si $x \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} x^n = |[x]^n| &= |\{f \colon [n] \to [x] \text{ función}\}| \\ &= \sum_{k=0}^{x} \sum_{Y \subseteq \binom{[x]}{k}} |\{f \colon [n] \to Y \text{ función sobreyectiva}\} \\ &= \sum_{k=0}^{x} \binom{x}{k} k! S(n,k) \\ &= \sum_{k=0}^{x} x^{\underline{k}} S(n,k). \end{aligned}$$

□

Corolario 60. *Para todo* $0 \leq a, b \leq n$,

$$\delta_{a,b} := [\![a = b]\!] = \sum_{k=0}^{n} S(a,k)s(k,b) = \sum_{k=0}^{\infty} S(a,k)s(k,b).$$

Alternativamente, si tomamos las matrices de $n \times n$, $\mathbf{S}_n = (S(i,j))_{1 \leq i,j \leq n}$ *y* $\mathbf{s}_n = (s(i,j))_{1 \leq i,j \leq n}$ *entonces* $\mathbf{S}_n$ *y* $\mathbf{s}_n$ *son inversas:* $I_n = \mathbf{S}_n \cdot \mathbf{s}_n$.

La demostración consiste en notar que $\mathbf{S}_n$ y $\mathbf{s}_n$ son las matrices de cambio de base entre $\{1, x, \ldots, x^n\}$ y $\{1, x, \ldots, x^{\underline{n}}\}$. Terminamos la clase calculando una serie formal muy interesante

$$\Big(\sum_{n\geq 0} x^n\Big)^m$$

$$\begin{aligned}[x^j]\Big(\sum_{n\geq 0} x^n\Big)^m &= [x^j] \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\in\mathbb{N}^m,\sum_{i=1}^m \alpha_i = j} x^{\alpha_1} x^{\alpha_2}\cdots x^{\alpha_m} \\ &= |\operatorname{WCOM}(j,m)| = \left(\!\binom{m}{j}\!\right).\end{aligned}$$

Luego

$$\Big(\sum_{n\geq 0} x^n\Big)^m = \sum_{j\geq 0} \left(\!\binom{m}{j}\!\right) x^j.$$

En otras palabras, para $m \geq 1$,

$$(1-x)^{-m} = \sum_{n\geq 0} \left(\!\binom{m}{n}\!\right) x^n = \sum_{n\geq 0} \binom{n+m-1}{n} x^n.$$

O bien, escalando x por -1 y usando que $\left(\!\binom{m}{n}\!\right) = \binom{-m}{n}(-1)^n$, concluimos que

$$(1+x)^{-m} = \sum_{n\geq 0} \left(\!\binom{m}{n}\!\right) (-x)^n = \sum_{n\geq 0} \binom{-m}{n} x^n.$$

Esta es una generalización del teorema del binomio para exponentes negativos.

Proposición 61. *Para todo $m \in \mathbb{Z}$:*

$$(1+x)^m = \sum_{n\geq 0} \binom{m}{n} x^n.$$

Clase 7

Como ya dijimos, normalmente no veremos las series formales como funciones sino como objetos abstractos sobre los cuales podemos hacer ciertas operaciones.

Definición 46. (**Operaciones sobre sucesiones y series formales**) Las siguientes operaciones unarias y binarias se definen en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ y en $\mathbb{C}[[x]]$. Sean a y b en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, y sus FGO asociadas A y B. Sea además $\lambda \in \mathbb{C}$.

Operación	En secuencias	En FGO
Suma	$(a+b)_n = a_n + b_n$	$(A+B)(x) = \sum_{n\geq 0}(a_n+b_n)x^n$.
Ponderación	$(\lambda a)_n = \lambda a_n$	$\lambda A(x) = \sum_{n\geq 0} \lambda a_n x^n$
Convolución/Producto	$(a\cdot b)_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$	$(AB)(x) = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n$
Escalamiento	$--$	$A(\lambda x) = \sum_{n\geq 0} a_n \lambda^n x^n$.

Observación 13. La multiplicación está definida de modo que las reglas habituales de álgebra de polinomios se cumplan, por ejemplo $x^i x^j = x^{i+j}$. Notemos que la suma y multiplicación de series están definidas de tal forma que el coeficiente que aparece frente a x^k en el resultado se obtiene operando una cantidad finita de coeficientes de los dos operandos. Por esta razon uno puede sumar y multiplicar sin preocuparse de las típicas preguntas de convergencia absoluta, condicional o uniforme que son tipicas en cálculo y análisis.

Dadas las operaciones anteriores, tiene sentido definir ciertas secuencias especiales.

Definición 47.
Llamamos 0 a la secuencia $(0) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ y también a su FGO asociada.
Llamamos 1 a la secuencia $(1) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ y también a su FGO asociada.
Llamamos Δ a la secuencia $(0,1) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Su FGO asociada es $F_\Delta(x) = x$.
Para $\lambda \in \mathbb{C}$, llamamos

$$\underline{\lambda} = (1, \lambda, \lambda^2, \dots),$$

a la secuencia con $(\underline{\lambda})_n = \lambda^n$.

Proposición 62. *La estructura $(\mathbb{C}[[x]], +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad. Es decir, la suma es asociativa, conmutativa, tiene neutro aditivo 0, y todo elemento F tiene inverso $-F := (-1)F$, el producto es asociativo, conmutativo, tiene neutro multiplicativo 1, y distribuye sobre la suma.*
Además, no hay divisores de 0 (si $F(x)G(x) = 0$ entonces $F(x) = 0$ o $G(x) = 0$) por lo cual, en particular hay cancelación*: si $F(x)G(x) = F(x)H(x)$ entonces $G(x) = H(x)$, sin importar si $F(x)$ tiene o no inverso.*
$(\mathbb{C}[[x]], +)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ (es decir, la ponderación por escalar es compatible con el producto, y también distribuye sobre la suma). Gracias a esto $(\mathbb{C}[[x]], +, \cdot)$ es un álgebra sobre $\mathbb{C}$.

Demostración. Propuesta como ejercicio. □

Veamos una caracterización de los elementos invertibles de $\mathbb{C}[[x]]$.

Proposición 63. *$F(x)^{-1}$ existe si y solo si $F(0) \neq 0$.*

Demostración. Sean $F = FGO(a)$, $G = FGO(b)$ para $a, b \in S$, tales que $F(x)G(x) = 1$. Entonces, $a_0 b_0 = 1$, y para todo $n \geq 1$, $\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0$. De aquí se tiene que $b_0 = 1/a_0$ y que $b_n = \frac{-1}{a_0}\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$. □

Cuando $F(x)^{-1}$ existe, la escribimos como $1/F(x)$ sin problemas. También lo hacemos para la sucesión asociada.
La primera serie de potencia cuyo inverso conviene recordar es la FGO de $(\underline{1})$, es decir

$$S(x) = \sum_{n\geq 0} x^n.$$

Proposición 64. *La inversa de $S(x)$ es $1-x$.*

Demostración. Basta probar que $1 = (1-x)S(x)$. En efecto,

$$(1-x)S(x) = (1-x)\sum_{n\geq 0} x^n = \sum_{n\geq 0} x^n - \sum_{n\geq 0} x^{n+1} = 1 + \sum_{n\geq 1} x^n(1-1) = 1. \quad \square$$

Antes de estudiar más propiedades de las series formales. Veamos mediante ejemplos que sucede al multiplicar una sucesión por una sucesión finita b. Sea $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

$$\begin{aligned}(a\cdot(1,-1))_n &= a_n - a_{n-1}\\ (a\cdot(1,-1,-1)_n &= a_n - a_{n-1} - a_{n-2}.\\ (a\cdot(1,-2,1))_n &= a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2}.\end{aligned}$$

Donde estamos suponiendo que $a_n = 0$, para $n < 0$. De aquí se ve que si el último término no nulo de b es b_k, entonces el término n-ésimo de $(a\cdot b)$ es combinación lineal de los términos $a_n, \ldots, a_{n-k}$. Es decir:

Proposición 65. *Sean $a, f \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ dos sucesiones, donde a es una sucesión finita de grado k (es decir, su FGO es un polinomio de grado k) entonces*

$$(a\cdot f)_n = f_n a_0 + f_{n-1}a_1 + \cdots + f_{n-k}a_k,$$

donde interpretamos $f_t = 0$ si $t < 0$.

Lo interesante de lo anterior es que nos permite escribir de manera compacta **recurrencias lineales** como ecuaciones lineales

1. Recurrencias lineales

Sea a una sucesión en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Decimos que a satisface una recurrencia lineal si existe $k \geq 0$, y una función lineal $f\colon \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}$ tal que para todo $n \geq k$.

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k})$$

En otras palabras, existen constantes $b_1, b_2, \ldots, b_k$ tal que para todo $n \geq k$,

$$a_n = b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2} + \ldots b_k a_{n-k}.$$

Al resolver una recurrencia, los valores $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ se suponen datos.

Proposición 66. *Toda recurrencia lineal para a se puede escribir como una ecuación en secuencias $a\cdot b = c$. Luego, su solución es $a = cb^{-1}$.*

Demostración. Directa. $\square$

Ejemplo 67.

$$\left.\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= 0\\ a_0 &= k.\end{aligned}\right\} \quad a\cdot(1,-1) = (k). \tag{R1}$$

$$\left.\begin{aligned} a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} &= 0\\ a_0 &= k\\ a_1 &= \ell\end{aligned}\right\} \quad a\cdot(1,-2,1) = (k, \ell - 2k). \tag{R2}$$

$$\left.\begin{aligned} a_n - a_{n-1} - a_{n-2} &= m\\ a_0 &= k\\ a_1 &= \ell\end{aligned}\right\} \quad a\cdot(1,-1,-1) = (k, \ell-k, m, m, \ldots) = (k-m, \ell-k-m) + m(\underline{1}). \tag{R3}$$

Calcular el inverso de una secuencia puede llevar a resolver una nueva recurrencia. Sin embargo en ocasiones resulta ser simple.

Proposición 68. $(\underline{\lambda})^{-1} = (1, -\lambda)$. *O equivalentemente* $\frac{1}{1-\lambda x} = \sum_{n\geq 0} \lambda^n x^n$.

Demostración.

$$((1,-\lambda)\cdot(\underline{\lambda}))_n = (\underline{\lambda})_n - \lambda(\underline{\lambda})_{n-1} = \begin{cases} \lambda^n - \lambda^n = 0, & \text{para } n \geq 1, \\ \lambda^0 = 1, & \text{para } n = 0. \end{cases} \quad \square$$

De aquí tenemos la solución a nuestra la recurrencia trivial (R1):

$$a = (k)\cdot(1,-1)^{-1} = (k)\cdot(\underline{1}) = k(\underline{1}).$$

También pudimos haberla resuelto usando FGO's como sigue: $F_a(x)\cdot(1-x) = k$ implica que $F_a(x) = k\sum_{n\geq 0} n^k$. Por lo cual $a_n = [x^n]F_a(x) = k$.

En clase no vimos las otras recurrencias, sin embargo las agrego aquí pues resultan ser interesantes.

Veamos como resolver (R2). Es fácil ver que $(1,-2,1) = (1,-1)^2$. Y que $((1,-1)^{-2})_n = ((\underline{1})^2)_n = n+1$. Luego la segunda recurrencia tiene por solución $a = (k, \ell-2k)\cdot(1,-1)^{-2} = (k,\ell-2k)\cdot(\underline{1}^2)$. Es decir $a_n = k(\underline{1}^2)_n + (\ell-2k)(\underline{1}^2)_{n-1} = k(n+1) + (\ell-2k)n = k + n\ell - kn$.

Resolveremos (R3) mediante FGO y fracciones parciales. Sabemos que

$$\begin{aligned} F_a(x) &= \frac{1}{(1-x-x^2)}\left(k - m + (\ell - k - m)x + m\sum_{n\geq 0} x^n\right) \\ &= \frac{1}{1-x-x^2}\left(k - m + (\ell-k-m)x + m/(1-x)\right) \\ &= \frac{A + Bx + Cx^2}{x(1-x-x^2)}, \end{aligned}$$

donde A, B, C son constantes en $\mathbb{C}$ y $(1-\alpha x)(1-\beta x) = (1-x-x^2)$.
La siguiente propiedad es muy útil para expresar inversas de polinomios como productos de geométricas:

Proposición 69. $(1-\alpha x)$ *divide a* $p(x) := a_0 + a_1 x + \ldots a_n x^n$, *con* $a_0 \neq 0$ *si y solo si* α *es raíz de* $a_0 x^n + a_{n-1}x^1 + \ldots a_n x^0$

Demostración. $(1-\alpha x)$ divide a $p(x)$ si y solo si $1/\alpha$ es raíz de $p(x)$. Es decir,

$$0 = p(1/\alpha) = a_0 + \frac{a_1}{\alpha} + \frac{a_2}{\alpha^2} + \cdots + \frac{a_n}{\alpha^n}.$$

Multiplicando la ecuación por α^n se concluye. $\square$

Volviendo a la ecuación para $F_a(x)$, tenemos que

$$F_a(x) = \frac{A + Bx + Cx^2}{x(1-\alpha x)(1-\beta x)},$$

con α, β son las raices de $x^2 - x - 1$. ($\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$).

Usando fracciones parciales, $F_a(x)$ se puede escribir como

$$\begin{aligned} F_a(x) &= \frac{A'}{(1-\alpha x)} + \frac{B'}{(1-\beta x)} + \frac{C'}{1-x} \\ &= \sum_{n\geq 0}(A'\alpha^n + B'\beta^n + C')x^n. \end{aligned}$$

Con A', B', C' constantes a determinar de las condiciones iniciales.
Por ejemplo, para la sucesión de Fibonacci, $f_0 = 0, f_1 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. La FGO nos da

$$F(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{1-\alpha x} - \frac{1}{1-\beta x}\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{(\alpha^n - \beta^n)}{\alpha-\beta} x^n.$$

De aquí uno deduce la fórmula de Binet:

$$f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha-\beta} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Cabe notar que la deducción de la función generatriz asociada a una recurrencia lineal no requiere mucho trabajo. No es necesario deducir la convolución como lo hicimos antes sino que podemos manipular la ecuación formalmente.
Por ejemplo, para la recurrencia $a_n = Ca_{n-1} + Da_{n-2} + E$, podemos escribir la FGO de a como sigue

$$\begin{aligned} F_a(x) &= \sum_{n\geq 0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \sum_{n\geq 2} a_n x^n \\ &= a_0 + a_1 x + \sum_{n\geq 2} (Ca_{n-1} + Da_{n-2} + E)x^n \\ &= a_0 + a_1 x + Cx \sum_{n\geq 2} a_{n-1}x^{n-1} + Dx^2 \sum_{n\geq 2} a_{n-2}x^{n-2} + E\sum_{n\geq 2} x^n \\ &= a_0 + a_1 x + Cx(F_a(x) - a_0) + Dx^2 F_a(x) + \frac{E}{1-x}. \end{aligned}$$

Despejando, se tiene

$$F_a(x) = \frac{a_0 + x(a_1 - Ca_0) + E/(1-x)}{1 - Cx - Dx^2}.$$

Usando la técnica anterior podemos resolver cualquier recurrencia lineal, en la medida que sepamos invertir polinomios.

2. Series especiales y principio de transferencia.

Como ya hemos dicho, es bastante útil trabajar con funciones generatrices debido a nuestra experiencia con series de potencias (A posteriori, sería más adecuado didácticamente primero aprender a usar series y polinomios formales y luego trabajar con funciones seriales o funciones polinomiales). Por ejemplo, podemos definir la serie formal

$$\exp(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}.$$

Y deducir que exp satisface que $\exp(x)\exp(-x) = \exp(0) = 1$. En efecto en $\mathbb{C}[[x]]$,

$$[x^n]\exp(x)\exp(-x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}\frac{(-1)^{n-j}}{(n-j)!} = \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j} = \frac{(1-1)^n}{n!} = \delta_{0,n}$$

que se prueba ¡mediante el teorema del binomio!
La ecuación anterior es muy conocida en variable compleja y nos gustaría ser capaz de usar identidades como la anterior sin tener que volver a demostrarlas. Para esto, el siguiente principio que usaremos sin demostrar, nos será de utilidad.

Teorema 70 (Principio de Transferencia)**.** *Si $F(x)$, $G(x)$ son dos series formales en $\mathbb{C}[[x]]$ tales que, vistas como funciones satisfacen $F(x) = G(x)$ para todo $x \in U$, donde U es un abierto (en la topología habitual de $\mathbb{C}$) alrededor del cero. Entonces $F(x) = G(x)$ como series formales.*

Por ejemplo, como $\exp(x)$ y $\exp(-x)$ están bien definidas como funciones (de hecho en todo $\mathbb{C}$) sabemos que la serie de potencias de $\exp(x)\exp(-x)$ también lo está. Además, $\exp(x)\exp(-x) = 1$ como funciones. Luego el principio de transferencia nos dice que $\exp(x)\exp(-x) = 1$ como series formales.
Otro ejemplo interesante consiste en considerar

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$
$$\cos(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

y usar el mismo argumento anterior para probar que como series formales.

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

Clase 8

1. Convergencia formal

La clase pasada observamos que la serie formal

$$\exp(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}.$$

satisface que $\exp(x)\exp(-x) = \exp(0) = 1$ lo cual se puede probar mediante el principio de transferencia.
Sin embargo, no hay que caer en la tentación de usar todo lo que sabe de series de potencias convergentes y aplicarlo como series formales. Hay que ser cuidadoso como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo: La identidad

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(x+1)^n}{n!} = e \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!},$$

que uno reconoce como $e^{x+1} = e^x \cdot e$, no tiene sentido en $\mathbb{C}[[x]]$, pues $\sum_{n\geq 0} \frac{(x+1)^n}{n!} \notin \mathbb{C}[[x]]$.

Para ver esto, notar que el término constante de la suma anterior es $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$, es decir una suma infinita de complejos. Su interpretación como número complejo requiere **conceptos de convergencia compleja** que no están definidos en $\mathbb{C}[[x]]$. A pesar que no usaremos convergencia en $\mathbb{C}$, necesitaremos en el futuro hablar de ciertos procesos infinitos en $\mathbb{C}[[x]]$, el más importante es que queremos **componer** series formales. Para esto vamos a tener que introducir un concepto muy estricto de convergencia en $\mathbb{C}[[x]]$.

Definición 48. La sucesión de series formales $(F_i(x))_i \in \mathbb{C}[[x]]$ **converge formalmente**[1] a $F(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ si para cada k, la sucesión $[x^k]F_i(x)$ es, a medida que i se va a infinito, eventualmente constante e igual a $[x^k]F(x)$.
Es decir, para todo k, existe $m(k)$ tal que para todo $i \geq m(k)$, $[x^k]F_i(x) = [x^k]F(x)$.

Nuestra definición de convergencia es muy estricta. Por ejemplo, la sucesión $(1 + x/j)^j$ no converge formalmente cuando j se va a infinito a $\exp(x)$pues para $n \geq 2$, $[x^n](1 + x/j)^j = \binom{j}{n}/j^n$ no se estabiliza (no es eventualmente constante).
Dado que tenemos el concepto de una sucesión formalmente convergente podemos definir otros objetos, como sumas y productos infinitos de series formales.

2. Sumas infinitas de series formales

Definición 49. Decimos que $\sum_{j\geq 0} F_j(x) = F(x)$, si la secuencia $\sum_{j=0}^{i} F_j(x)$ converge formalmente a $F(x)$ en $\mathbb{C}[[x]]$ cuando $i \to \infty$.

Dicho de otra forma, la suma $\sum_{j\geq 0} F_j(x)$ tiene sentido solo cuando para cada k, el coeficiente $[x^k]\sum_{j=0}^{n} F_j(x)$ es eventualmente constante a medida que n se va a infinito. Es decir, $[x^k]\sum_{j\geq 0} F_j(x) = \sum_{j\geq 0}[x^k]F_j(x)$ es en realidad una suma con un número finito de términos no nulos.

[1] Para los más topológicos o analistas: dotamos a $\mathbb{C}[[x]]$ con la topología producto de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}} \cong \mathbb{C}[[x]]$ donde en cada factor usamos la topología discreta de $\mathbb{C}$.

Esto justifica manipulaciones que hemos hecho sin mucho pensar, por ejemplo si una suma infinita de series formales está definida, podemos sumar sus términos en cualquier orden y sigue estando definida.

$$\sum_{j\geq 0}(x^j + x^{j+1})$$

es el limite formal de $\sum_{j=0}^{n}(x^j + x^{j+1})$. Notando que el término k-ésimo de $\sum_{j\geq 0}(x^j + x^{j+1})$ se obtiene sumando a lo más 2 términos no nulos tenemos que $\sum_{j\geq 0}(x^j + x^{j+1})$ está bien definida y podemos permutar los sumandos como queramos:

$$\sum_{j\geq 0}(x^j + x^{j+1}) = \sum_{j\geq 0} x^j + \sum_{j\geq 1} x^j = \frac{1}{1-x} + \frac{x}{1-x} = \frac{1+x}{1-x}.$$

Veamos un ejemplo de suma infinita.

Proposición 71.

$$\sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq n} x^m = \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{1-x} = (1-x)^{-2}$$

3. Productos infinitos: Número de soluciones enteras satisfaciendo una suma

Usando los conceptos de convergencia de la sección pasada podemos definir el producto infinito de series formales.

Definición 50. Decimos que $\prod_{j\geq 0} F_j(x) = F(x)$, si la secuencia $\prod_{j=0}^{i} F_j(x)$ converge formalmente a $F(x)$ en $\mathbb{C}[[x]]$ cuando $i \to \infty$.

Notamos que para que el producto tenga sentido (y no valga 0), necesitamos al menos que

$$[x^0]\prod_{j=0}^{i} F_j(x) = \prod_{j=0}^{i} F_j(0)$$

se estabilice a partir de cierto i, luego $F_j(0) = 1$, para todo j mayor o igual que un i_0 fijo.
Dejamos propuesto lo siguiente

Proposición 72. *Sean $F_j(x)$ series formales con $F_j(0) = 0$.*

$$\prod_{j\geq 0}(1 + F_j(x))$$

está bien definido como serie formal si y solo si $\lim_{n\to\infty} \operatorname{ord}(F_j(x)) = \infty$, donde el orden $\operatorname{ord}(F(x))$ de una serie es el índice k más pequeño tal que

$$[x^k]F(x) \neq 0.$$

Demos un ejemplo interesante de productos infinitos.

Proposición 73. *Sea $p = (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión dada por el número de particiones enteras de n*

$$p = (1, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42, 56, \dots).$$

La FGO de p es

$$\sum_{n\geq 0} p_n x^n = \prod_{k\geq 1}\frac{1}{1-x^k}.$$

Demostración. En efecto, sea $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}[x^n]\prod_{k\geq 1}\frac{1}{1-x^k} &= [x^n]\prod_{k\geq 1}(\sum_{m\geq 0} x^{km}) \\ &= [x^n](1 + x + x^2 + x^3 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \dots)(\dots)\end{aligned}$$

Observamos que el lado derecho es igual al número de formas de escribir n como suma de una potencia en cada factor del producto infinito. Es decir, $n = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 \dots$. En otras palabras $[x^n] \prod_{k\geq 1} \frac{1}{1-x^k}$ es igual al número de soluciones de la ecuación

$$n = \sum_{i\geq 0} i a_i, \quad \forall i : a_i \in \mathbb{N}$$

Esto es exactamente igual al número de particiones de n. □

Usando el mismo método que antes no es difícil concluir que el número de soluciones de la ecuación

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_k x_k = n,$$

con $a_i \in \mathbb{N}$ números naturales dados y $x_i \in \mathbb{N}$ variables naturales es $[x^n]F(x)$, donde

$$F(x) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 - x^{a_i}}.$$

Podemos generalizar esto aún más del siguiente modo.

Proposición 74. *Sean $N_i \subseteq \mathbb{N}$, subconjuntos no necesariamente finitos de números naturales, para i en un conjunto de índices I (normalmente, $I = [k]$ o $I = \mathbb{N}$.)*
Sea $S(n)$ el número de soluciones del sistema de ecuaciones

$$n = \sum_{i\in I} x_i$$
$$x_i \in N_i, \quad \forall i \in I.$$

Si $s(n)$ es finito para todo n entonces la FGO de $s(n)$ es

$$\sum_{n\geq 0} s(n) x^n = \prod_{i\in I} A_i(x) := S(x)$$

donde

$$A_i(x) = \sum_{j\in N_i} x^j.$$

Demostración. Basta notar que para todo n, el coeficiente $[x^n]S(x)$ es igual al número de formas de elegir un término x^{j_i} de cada $i \in I$ de modo tal que su producto de x^n. Esto es exactamente igual a $s(n)$. □

Por ejemplo, recordemos que las composiciones débiles de n en k partes son las soluciones del sistema $n = \sum_{i=1}^{k} x_i$ con $x_i \in \mathbb{N}$. La proposición anterior nos dice entonces que para todo k fijo,

$$\sum_{n\geq 0} \mathrm{wcom}(n,k) x^n = \prod_{i=1}^{k} \sum_{i\in\mathbb{N}} x^i.$$

En efecto, por el teorema del binomio:

$$\prod_{i=1}^{k} \sum_{i\in\mathbb{N}} x^i = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-k}$$
$$= \sum_{n\geq 0} \binom{-k}{n} (-x)^n = \sum_{n\geq 0} \left(\!\!\binom{k}{n}\!\!\right) x^n.$$

Otro ejemplo interesante es el siguiente: ¿De cuántas maneras podemos repartir n dulces iguales en $2k$ personas de manera que k de ellas reciban un número par de dulces individualmente, y el resto reciban un número impar? Llamemos $D(n,k)$ a la respuesta.
En este caso estamos contando el número de soluciones de $n = \sum_{i=1}^{2k} x_i$, donde x_i es par para $i \in [k]$, y x_i es impar para i entre $k+1$ y $2k$.

Definiendo

$$A_0 = \sum_{i\in\mathbb{N}:\ i \text{ par}} x^i = \frac{1}{1-x^2},$$

y

$$A_1 = \sum_{i\in\mathbb{N}:\ i \text{ impar}} x^i = \frac{x}{1-x^2},$$

tenemos, gracias a la proposición anterior que

$$\sum_{n\geq 0} D(n,k)x^n = A_0^k A_1^k = \frac{x^k}{(1-x^2)^{2k}} = x^k(1-x^2)^{-2k}$$
$$= x^k \sum_{m\geq 0} \binom{-2k}{m}(-x^2)^m = \sum_{m\geq 0} \left(\!\!\binom{2k}{m}\!\!\right) x^{2m+k}$$

Igualando coeficientes (usando $2m+k=n$) tenemos que

$$D(n,k) = \left(\!\!\binom{2k}{(n-k)/2}\!\!\right) [\![(n-k)/2 \in \mathbb{N}.]\!]$$

4. Composiciones de series formales

La suma infinita también nos permite hablar de composición de series formales en ciertos casos.

Definición 51. Sean $F(x), G(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ con $F(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$. Definimos la composición $(F\circ G)(x) = F(G(x))$ como la suma infinita

$$\sum_{n\geq 0} a_n G(x)^n.$$

Esta suma está bien definida en dos casos

1. Si $F(x) \in \mathbb{C}[x]$.
2. Si $G(0) = 0$.

Es muy fácil ver que si $F(x)$ es polinomio entonces $F(G(x))$ no es más que una combinación finita de potencias de $G(x)$, así que no hay problemas de convergencia. El caso interesante es cuando $F(x)$ es serie y $G(0)=0$.
Notar que si $G(x) = \sum_{m\geq 1} b_m x^m$, entonces para todo $n > k$,

$$[x^k](G(x))^n = 0$$

y luego

$$[x^k] \sum_{n\geq 0} a_n G(x)^n = [x^k] \sum_{n=0}^{k} a_n G(x)^n$$

se calcula como una suma finita.
Por ejemplo, como la serie "$G(x) = x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{x}{1-x}$" no tiene término constante, podemos escribir

$$\exp\left(\frac{x}{1-x}\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\left(\sum_{m\geq 1} x^m\right)^n$$

Comprobemos que los coeficientes se expresan como sumas finitas en $\mathbb{C}$:

$$[x^i]\exp\left(\frac{x}{1-x}\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{[x^i]}{n!}\left(\sum_{m\geq 1} x^m\right)^n =$$
$$= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} |\operatorname{COM}(i,n)| = \sum_{n=0}^{i} \frac{\binom{i-1}{i-n}}{n!}.$$

La restricción que $G(0) = 0$ es importante para que la composición esté bien definida. Por ejemplo, ya vimos que la expresión $\exp(x+1)$ no tiene sentido pues su suma no estabiliza ni siquiera para el coeficiente asociado a $n = 0$.
Ahora que tenemos la composición podemos usar nuestros teoremas del binomio anteriores para decir que para todo $F(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ con $F(0) = 0$, y todo $m \in \mathbb{Z}$

$$(1 + F(x))^m = \sum_{n \geq 0} \binom{m}{n} F(x)^n,$$

Clase 9

1. Derivadas de series formales y potencias complejas

Si $F(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ entonces definimos su derivada formal como $F'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}x^n$.
Es fácil ver que tenemos las reglas habitual de derivación:

$$\begin{aligned}(F(x)+G(x))' &= F'(x)+G'(x).\\ (F(x)G(x))' &= F'(x)G(x)+F(x)G'(x).\\ F(G(x))' &= F'(G(x))G'(x).\end{aligned}$$

Y de hecho, tenemos que cada serie formal es igual a su **serie de Taylor** en el origen, es decir

$$F(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{F^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Aprovechemos este momento para definir la **potencia compleja**. Vimos que para todo $m \in \mathbb{Z}$,

$$(1+x)^m = \sum_{n\geq 0}\binom{m}{n}x^n.$$

Demos un paso más y **definamos** para $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$(1+x)^\lambda = \sum_{n\geq 0}\binom{\lambda}{n}x^n. \tag{9.1}$$

Usando composición, esta definición se extiende a

$$(1+F(x))^\lambda = \sum_{n\geq 0}\binom{\lambda}{n}F(x)^n.$$

en la medida que $F(0) = 0$. Notemos que,

$$((1+x)^\lambda)' = \sum_{n\geq 1}\binom{\lambda}{n}nx^{n-1} = \sum_{n\geq 1}\frac{(\lambda)_n}{(n-1)!}x^{n-1} = \lambda\sum_{n\geq 1}\frac{(\lambda-1)_{n-1}}{(n-1)!}x^{n-1} = \lambda(1+x)^{\lambda-1}$$

y en general, la n-ésima derivada de $(1+x)^\lambda$ es $\binom{\lambda}{n}n!(1+x)^{\lambda-n}$.

Recordemos que la propiedad de transferencia permite probar que cualquier identidad que se tenga para series de Taylor convergentes en un abierto valen para series formales. En particular,

$$\begin{aligned}(1+x)^{\lambda+\mu} &= (1+x)^\lambda(1+x)^\mu\\ ((1+x)^\lambda)^\mu &= (1+((1+x)^\lambda-1))^\mu = (1+x)^{\lambda\mu}\end{aligned}$$

pues ambas expresiones son válidas para $x \in \mathbb{C}$, con $|x| \leq 1$, interpretando ambos lados como sus series de Taylor.
Como corolario, tenemos que las mismas propiedades valen si reemplazamos x por cualquier serie $F(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ con $F(0) = 0$ (aquí estamos usando composición).

Otra serie importante de definir es

$$L(x) := \ln(1+x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} = -\sum_{n\geq 1} \frac{(-x)^n}{n}$$

Como $L(0) = 0$ tenemos derecho a escribir $\exp(L(x))$, y como en los complejos

$$\exp(L(x)) = \exp(\ln(1+x)) = 1+x,$$

para $|x| < 1$, concluimos la misma identidad como series formales.
Similarmente la composición $\ln(\exp(x)) = L(\exp(x)-1)$ está bien definida (pues $\exp(x) - 1 = 0$), y se tiene que

$$\ln(\exp(x))) = x$$

como serie formal.
Usando potencias complejas podemos dar una demostración alternativa de la identidad de Chu-Vandermonde siguiente:

Proposición 75. *Para $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.*

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{\alpha}{i}\binom{\beta}{n-i} = \binom{a+b}{n}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} \binom{\alpha}{i}\binom{\beta}{n-i} &= [x^n]\left((\sum_{m\geq 0}\binom{\alpha}{m}x^m)(\sum_{m\geq 0}\binom{\beta}{m}x^m)\right)\\ &= [x^n]((1+x)^\alpha(1+x)^\beta)\\ &= [x^n](1+x)^{\alpha+\beta}\\ &= \binom{\alpha+\beta}{n}.\end{aligned}$$

□

2. FGO asociadas a binomiales y a otras cantidades conocidas

Muchas de las expresiones combinatoriales que hemos estudiado en el curso dependen de dos (o más) parámetros, por ejemplo $\binom{n}{k}, \left(\binom{n}{k}\right), S(n,k)$, etc.
Para describir estas sucesiones bidimensionales como series formales, es útil trabajar con más de una variable. Por ejemplo, podemos codificar la sucesión $\binom{n}{k}$ como la serie $A(x,y) = \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}x^k y^n \in \mathbb{C}[[x,y]]$.
Observación: Falta describir método de Snake Oil mediante un ejemplo. En una versión futura se hará.

$$\begin{aligned}A(x,y) &= \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0} b_{k,n}x^k y^n = \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}x^k y^n\\ &= \sum_{n\geq 0}(1+x)^n y^n\\ &= \sum_{n\geq 0}((1+x)y)^n\\ &= \frac{1}{1-(1+x)y} = \frac{1}{1-y-xy}.\end{aligned}$$

Ya sabemos, por ejemplo que la FGO de la sucesión univariada $\binom{n}{k}_{k\geq 0}$ es $(1+x)^n$. Usemos $A(x,y)$ para deducir la FGO de la sucesión univariada $\binom{n}{k}_{n\geq 0}$.

$$[x^k]A(x,y) = \sum_{n\geq 0} y^n [x^k y^n] A(x,y) = \sum_{n\geq 0} y^n \binom{n}{k}.$$

Luego $[x^k]A(x,y)$ es la FGO de que buscamos. Desarrollemos tratando de aislar x^k.

$$\begin{aligned} A(x,y) &= \frac{1}{(1-y)-xy} = \frac{1/(1-y)}{1-xy/(1-y)} \\ &= \frac{1}{1-y}\sum_{k\geq 0}\left(\frac{xy}{1-y}\right)^k = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{1-y}\left(\frac{y}{1-y}\right)^k x^k. \end{aligned}$$

Es decir, la FGO de $a = (\binom{0}{k}, \binom{1}{k}, \dots, \binom{n}{k}, \dots)$ es

$$[x^k]A(x,y) = \frac{y^k}{(1-y)^{k+1}}.$$

(Notar que los términos a_n son 0 para $n < k$).
Un corolario interesante se obtiene evaluando $A(x,y)$ en $x = y$:

$$\frac{1}{1-x-x^2} = A(x,x) = \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}x^{n+k} = \sum_{m\geq 0} x^m \sum_{i\geq 0}\binom{m-i}{i}$$

Recordando que $\frac{x}{1-x-x^2}$ es la FGO de los números de Fibonacci tenemos que:

$$f_{m+1} = [x^m]A(x,x) = \sum_{i\geq 0}\binom{m-i}{i}.$$

3. Otras funciones generatrices

Recordemos que $X := (x^0, x^1, \dots)$ es un conjunto de series formales (polinomios de hecho) tal que toda serie formal se escribe de manera única como combinación lineal infinita de estos polinomios.
Sin embargo esta elección no es la única posible: podemos amplificar cada coordenada por alguna constante y seguimos teniendo representación única.
Dependiendo del representante que escojamos podemos tener distintas funciones generatrices asociadas a una secuencia.
Un ejemplo importante de alternativa es el de FGE.
Sea $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ una secuencia. La función generatriz exponencial (FGE) de a es $\hat{F}(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ dada por

$$\hat{F}(x) = \sum_{n\geq 0} f(n)\frac{x^n}{n!}.$$

Es decir usamos la secuencia $(x^n/n!)$ como generadora. [Def]

$[x^n/n!]F(x)$ recupera $f(n)$. Esto es lo mismo que $n![x^n]F(x)$.
Por ejemplo, la FGE de $(\underline{1})$ es $\exp(x)$. La FGE de (λ) es $\exp(\lambda x)$.
Producto de FGE: Convolución binomial.

$$\begin{aligned} \hat{A}(x)\cdot\hat{B}(x) &= \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}\sum_{n\geq 0} b_n \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n\geq 0} x^n (\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i!}\frac{b_{n-i}}{(n-i)!} \\ &= \sum_{n\geq 0} x^n \binom{n}{i}\frac{a_i b_{n-i}}{n!}. \end{aligned}$$

Nota: Si a y b son secuencias, la secuencia c con $c_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i b_{n-i}$ se conoce como su **convolución binomial**.

Aplicación: Fórmula de inversión binomial.
Sea a_n y b_n dos secuencias tal que

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} b_i$$

entonces se deduce que

$$b_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} a_i$$

En efecto, notamos que a es la convolución binomial de b con la secuencia $(\underline{1})$.
Es decir,

$$\hat{A}(x) = \exp(x)\hat{B}(x)$$

Por lo tanto

$$\hat{B}(x) = \hat{A}(x)\exp(-x)$$

que es exactamente lo que tenemos .

Ejemplo: Calcule la FGE $\hat{B}(x)$ de los numeros de Bell usando que satisfacen

$$B(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(k).$$

Para la resolución, notamos que el lado derecho es una convolución binomial entre la secuencia $B(\cdot)$ y la secuencia $(\underline{1})$. Por lo tanto, el producto de las FGE asociadas a ambas secuencias será la FGE asociada a la secuencia $(B(n+1))_{n\geq 0}$. Es decir,

$$\hat{B}(x)\exp(x) = \sum_{n\geq 0} B(n+1)\frac{x^n}{n!} = \frac{d}{dx}\sum_{n\geq 0} B(n+1)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{d}{dx}(\hat{B}(x) - 1) = \frac{d}{dx}\hat{B}(x).$$

Concluimos que

$$\frac{d}{dx}\ln(\hat{B}(x)) = \frac{\frac{d}{dx}\hat{B}(x)}{\hat{B}(x)} = \exp(x).$$

De esto se deduce que

$$\ln(\hat{B}(x)) = \int_0^x \exp(x)dx = \exp(x) - 1$$

y luego,

$$\hat{B}(x) = \exp(\exp(x) - 1).$$

Clase 10

1. Método simbólico para objetos no etiquetados

Este método nos permitirá pasar mecánicamente de ciertos problemas de conteo a problemas en series formales.

Definición 52. Una **clase combinatorial** es un conjunto finito o numerable $\mathcal{A}$, junto a una función de tamaño $|\cdot|_{\mathcal{A}}\colon \mathcal{A} \to \mathbb{N}$ que satisface que para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{A}_{(i)} = \{x \in \mathcal{A}\colon |x|_{\mathcal{A}} = i\}$$

es finito. Normalmente anotamos $|\cdot|_{\mathcal{A}}$ simplemente como $|\cdot|$.

Definición 53. La **secuencia de conteo** de $\mathcal{A}$ es $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $a(i) = |\mathcal{A}_i|$. La FGO

$$A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{a\in\mathcal{A}} x^{|a|},$$

se conoce como la FGO de la clase $\mathcal{A}$.

Observación 14. Por comodidad, usaremos la siguiente convención. La clase, su secuencia de conteo y su FGO son denotadas con la misma letra pero en distinta tipografía. La clase se denota con letra caligráfica, la secuencia de conteo con letra en minúscula, y la FGO con la misma letra en mayúscula: Por ejemplo $(\mathcal{B}, b_n, B(x)), (\mathcal{C}, c_n, C(x))$

Ejemplo 76. Sea $N \in \mathbb{N}$. La clase combinatorial $\mathcal{P} := \mathcal{P}([N])$ con función de tamaño $w(X) = |X|$, tiene como secuencia de conteo $p_n = \binom{N}{n}$ y FGO $P(x) = (1+x)^N$.

Definimos dos clases combinatoriales especiales

Definición 54. La clase neutra $\mathcal{E}$ tiene un solo elemento, llamado ε, de peso 0.
La clase atómica $\mathcal{Z}$ tiene un solo elemento, llamado $\bullet$, de peso 1.

Las clases anteriores reciben su nombre del hecho que $E(x) = x^0 = 1$ y $Z(x) = x^1 = x$.
En ocasiones nos convendrá definir varias clases atómicas (cuyos elementos recibirán diferentes nombres) por ejemplo podemos escribir $\mathcal{Z}_a = \{a\}$ donde a es un elemento de peso 1.
Otro ejemplo relevante de clase combinatorial es el de un alfabeto finito, digamos $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_k\}$, cuyos elementos tienen todos peso 1. En este ejemplo, la FGO asociada es $S(x) := kx = |\Sigma|x$.

La gracia de usar clases combinatoriales es que podemos obtener nuevas clases a partir de clases más simples mediante algunas operaciones. Podemos definir la intersección de dos clases combinatoriales $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ como su intersección a nivel de conjuntos *solamente* si la función de largos coincide en la intersección. Asimismo podemos definir la unión de dos clases combinatoriales $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ de la manera natural en la medida que su función de largo coincida en la intersección de ambas clases. Las siguientes operaciones son más generales (y más utiles).

Definición 55. La suma de clases combinatoriales $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ es simplemente la clase

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B},$$

suponiendo que ambas son disjuntas (si no, trabajamos con su unión disjunta: $\mathcal{A} \times \varepsilon_1$ y $\mathcal{A} \times \varepsilon_2$).

La gracia de la suma por sobre la unión es que está siempre definida. Se tiene directamente que si $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ entonces

$$C(x) = \sum_{c\in\mathcal{A}+\mathcal{B}} x^{|c|} = \sum_{c\in\mathcal{A}} x^{|c|_{\mathcal{A}}} + \sum_{c\in\mathcal{B}} x^{|c|_{\mathcal{B}}} = A(x) + B(x).$$

Definición 56. El producto de dos clases combinatoriales $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ es

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{ab \colon a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}\}.$$

En general, el producto de una secuencia de clases combinatoriales $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots \mathcal{A}_k$ es el conjunto de palabras con i-ésimo simbolo en $\mathcal{A}_i$, es decir

$$\prod_{i=1}^{k} \mathcal{A}_i = \{(w_1, w_2, \ldots, w_k) \colon w_i \in \mathcal{A}_i\}$$

La función de tamaño de una secuencia $w \in \prod_{i=1}^{k} \mathcal{A}_i$ se define como

$$|w| = |w_1| + |w_2| + \cdots + |w_k|$$

Definición 57. La **secuencia** de una clase combinatorial $\mathcal{A}$, donde $A(0) = 0$ se define como

$$\mathrm{SEQ}(\mathcal{A}) = \varepsilon + \mathcal{A} + \mathcal{A}^2 + \cdots = \sum_{n \geq 0} \mathcal{A}^n.$$

Es fácil ver que $\mathrm{SEQ}(\mathcal{A})$ es una clase combinatorial y que su FGO es $(1 - A(x))^{-1}$ (notar que aquí necesitamos $A(0) = 0$ para poder componer).

Ejemplos

Palabras de largo 1 sobre el alfabeto Σ, (tamaño = largo): Clase combinatorial Σ, con FGO, $|\Sigma|x$.

Conjunto de los números naturales con $|n| = n$. Clase combinatorial $\mathbb{N} = Seq(\mathcal{Z})$ con FGO $N(x) = \frac{1}{1-Z(x)} = \frac{1}{1-x}$.

Veamos un problema interesante:
Problema: ¿Cuántas formas hay de cubrir el tablero de 1 x n usando solo monominós y dominós?
Para atacar este problema podemos crear la clase combinatorial que representa las fichas de largo 1 y 2 respectivamente, por ejemplo $\mathcal{U} = \{\bullet, \bullet\bullet\}$, con FGO $U(x) = x + x^2$.
De aquí, la clase combinatorial que nos interesa es la de secuencias de fichas $\mathcal{V} = Seq(\mathcal{U})$, y la respuesta al problema corresponde a determinar cuantas secuencias tienen peso n, o equivalentemente encontrar $[x^n]V(x)$, donde

$$V(x) = \frac{1}{1 - U(x)} = \frac{1}{1 - x - x^2}$$

reconociendo que $xV(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$ es la FGO de los números de Fibonacci, se deduce que $[x^n]V(x) = f_{n+1}$.
Observamos que este problema se generaliza fácilmente a fichas de distinto tamaño, por ejemplo el número de formas de cubrir el tablero de 1 x n con fichas de tamaños 3, 5 y 7 es $[x^n]\frac{1}{1-x^3-x^5-x^7}$.

Árboles planos: Un árbol plano (no etiquetado) es una colección de nodos o puntos en el plano. Cada uno de ellos tiene una lista ordenada de vértices asociados llamados hijos (que puede ser vacia). Exactamente uno de ellos se llama raiz. Para ser llamado árbol plano, se debe construir de la siguiente forma:

1. Un nodo solo sin hijos es un árbol plano. Dicho vértice es su raíz.
2. Si $T_1, \ldots, T_k$ son una lista ordenada de árboles planos disjuntos con raíces $r_1, \ldots, r_k$. Entonces podemos combinarlos, tomando un vértice nuevo r como raiz y dejar que su i-esimo hijo sea r_i.

Un árbol plano se llama **binario general** si todos los vértices tienen 0, 1 o 2 hijos. Se llama **binario completo** si todos los vértices tienen 0 o 2 hijos. Un terminal es un vértice sin hijos.
Podemos obtener varios problemas,

(1) ¿Cuántos árboles planos existen con exactamente n nodos?

(2) ¿Cuántos árboles planos binarios generales existen con exactamente n nodos?

(3) ¿Cuántos árboles planos binarios completos con exactamente n nodos?

Realicemos los dos primeros y dejemos el tercero propuesto. Llamemos $\mathcal{T}$ a la clase de árboles planos. Notamos que todo árbol plano consiste de un nodo (su raiz) al cual se le cuelga una secuencia ordenada de árboles planos. En otras palabras, se tiene la ecuación:

$$\mathcal{T} = \{\bullet\} \times Seq(\mathcal{T})$$

que se traduce en la ecuación para FGO siguiente

$$T(x) = x \cdot \frac{1}{1 - T(x)}, \text{ o bien } T(x)^2 - T(x) + x = 0$$

Despejando, obtenemos $T(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2}$, donde reconocemos que el signo correcto es el signo - (pues $T(0) = 0$).
En otras palabras, tenemos que para $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
[x^n]T(x) &= [x^n]\frac{1}{2}(1 - (1-4x)^{1/2}) = \frac{-1}{2}[x^n](1-4x)^{1/2} = \frac{-1}{2}\binom{1/2}{n}(-4)^n \\
&= \frac{4^n(-1)^{n+1}}{2}\frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})\cdots(-\frac{2n-3}{2})}{n!} \\
&= \frac{4^n}{2^{n+1}n!}(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)) \\
&= \frac{4^{n-1}}{2^{n+1}n!} \cdot \frac{(2n-2)!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2)} \\
&= \frac{4^{n-1}}{2^{n+1}n!} \cdot \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!} \\
&= \frac{1}{4n}\binom{2n-2}{n-1}.
\end{aligned}$$

Para la segunda pregunta, llamemos $\mathcal{B}$ a la clase de árboles planos binarios generales. Luego se tiene la ecuación

$$\mathcal{B} = \{\bullet\} \times (\{\varepsilon\} + \mathcal{B} + \mathcal{B}^2),$$

de lo que se deduce que

$$B(x) = x(1 + B(x) + B(x)^2)$$

La expresión para $B(x)$ se puede obtener resolviendo esta ecuación.
Existen otras construcciones, como $PSET$ y $MSET$, las cuales describimos pero no usaremos más que ocasionalmente.

Definición 58. llamamos $PSET(\mathcal{A})$ a la clase combinatorial que contiene todos los subconjuntos finitos de $\mathcal{A}$ y $MSET(\mathcal{A})$ a la que contiene todos los multiconjuntos finitos de $\mathcal{A}$, donde el peso de un conjunto/multiconjunto es igual a la suma del peso de sus elementos.

Lema 77. *Sea $\mathcal{A}$ una clase combinatorial cualquiera sin elementos de peso 0 y sean $\mathcal{P} = PSET(\mathcal{A})$ y $\mathcal{M} = MSET(\mathcal{A})$. Entonces las FGOs de $\mathcal{P}$ y $\mathcal{M}$ son*

$$\begin{aligned}
P(x) &= \prod_{n\geq 1}(1+x^n)^{a_n} = \exp\Big(\sum_{k\geq 1}\frac{A(x^k)}{k}(-1)^{k+1}\Big) = \exp\left(\frac{A(x)}{1} - \frac{A(x^2)}{2} + \frac{A(x^3)}{3} - \dots\right) \\
M(x) &= \prod_{n\geq 1}(1-x^n)^{-a_n} = \exp\Big(\sum_{k\geq 1}\frac{A(x^k)}{k}\qquad\qquad\Big) = \exp\left(\frac{A(x)}{1} + \frac{A(x^2)}{2} + \frac{A(x^3)}{3} + \dots\right)
\end{aligned}$$

Demostración. A cada elemento X de $PSET(\mathcal{A})$ se le puede asociar un vector $s(X)$ posiblemente infinito con una coordenada por elemento α de $\mathcal{A}$ tal que $s(X)_\alpha$ vale ε si $\alpha \notin X$, y vale α si $\alpha \in X$.

En otras palabras $s(X) \in \prod_{\alpha\in\mathcal{A}}(\{\varepsilon\}\times\{\alpha\})$, notamos también que el peso de $s(X)$ es igual al peso de X (pues el peso de una secuencia es la suma de los pesos de sus coordenadas). Concluimos que $s\colon PSET(\mathcal{A}) \to \prod_{\alpha\in\mathcal{A}}(\{\varepsilon\}\times\{\alpha\})$ es una biyección que preserva los pesos. Por lo tanto, la FGO de $PSET(\mathcal{A})$ es igual a la FGO de $\prod_{\alpha\in\mathcal{A}}(\{\varepsilon\}\times\{\alpha\})$ que es igual a

$$\begin{aligned}
P(x) &= \prod_{\alpha\in\mathcal{A}}(1+x^{|\alpha|}) = \prod_{n\geq 1}(1+x^n)^{A_n} \\
&= \exp\big(\ln\big(\prod_{n\geq 1}(1+x^n)^{A_n}\big)\big) = \exp\big(\sum_{n\geq 1} A_n \ln(1+x^n)\big) \\
&= \exp\left(\sum_{n\geq 1}\sum_{i\geq 1} A_n \frac{(-1)^{k+1}x^{nk}}{k}\right) \\
&= \exp\left(\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sum_{n\geq 1} A_n x^{nk}\right) \\
&= \exp\left(\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}A(x^k)\right).
\end{aligned}$$

Veamos ahora los multiconjuntos finitos. A cada elemento X de $MSET(\mathcal{A})$ y cada $\alpha \in X$ se le puede asociar una secuencia $s(X,\alpha) \in \{\alpha\}^* = SEQ(\{\alpha\})$ que tiene tantos α como veces aparece α en el multiconjunto. Luego se puede definir $s(X)$ como el producto de las secuencias $s(X,\alpha)$ con $\alpha \in \mathcal{A}$. Con esto $s\colon MSET(\mathcal{A}) \to \prod_{\alpha\in A} SEQ(\{\alpha\})$ resulta ser una biyección que preserva pesos, y luego la FGO de $MSET(\mathcal{A})$ es igual a la FGO de $\prod_{\alpha\in A} SEQ(\{\alpha\})$. Recordando que la FGO de $SEQ(\{\alpha\})$ es $\frac{1}{1-x^{|\alpha|}}$. Con esto,

$$M(x) = \prod_{\alpha\in\mathcal{A}}(1-x^{|\alpha|})^{-1} = \prod_{n\geq 1}(1-x^n)^{-A_n}$$

que se simplifica a

$$\exp\left(\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}A(x^k)\right) \quad \square$$

Gracias a lo anterior, podemos estudiar por ejemplo, la clase de árboles no planos generales: En esta clase, los hijos de un nodo no están ordenados: cada nodo posee como hijos un multiconjunto de árboles (esto es pues dos de sus hijos podrían ser iguales).
Esta clase, digamos $\mathcal{T}$ satisface entonces la ecuación:

$$\mathcal{T} = \{\bullet\} \times MSET(\mathcal{T})$$

que se traduce en la ecuación para FGO siguiente

$$T(x) = x \cdot \exp\left(\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}T(x^k)\right).$$

Otro ejemplo, es la clase de las particiones de n con partes distintas. Llamemos $\mathcal{Q}$ a esta clase. Es fácil ver que una parte es una secuencia no vacía de átomos, si llamamos $\mathcal{S} = SEQ(\{\bullet\}) \setminus \{\varepsilon\}$, entonces

$$\mathcal{Q} = PSET(\mathcal{S})$$

que se traduce en la ecuación

$$Q(x) = \prod_{n\geq 1}(1+x^n)^{s_n} = \prod_{n\geq 1}(1+x^n) = \exp(\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\frac{1}{1-x^k}).$$

Clase 11

Problema: ¿Cuántas palabras de largo n sobre $[3]$ no tienen a 32 como subpalabra.
Resolvamos este problema mediante el método simbólico. Sea $\mathcal{L}$ la clase combinatorial de las palabras sobre $[k+1]$ que no tienen a $(k+1)1$ como subpalabra, donde el largo de una palabra es igual a su número de letras.
Una forma de hacer esto, es factorizar cada palabra de $\mathcal{L}$ en bloques que se puedan identificar de manera única. De esta forma podremos escribir $\mathcal{L}$ como un producto de otras clases.
Sea $w \in \mathcal{L}$. Llamemos corte a todas las posiciones i, tal que $w_i = 3$ pero $w_{i-1} \neq 3$. Luego podemos partir w en bloques centrales que parten en un çortez terminan en el caracter anterior al siguiente corte (si la palabra no empieza con 3, hay que incluir un bloque inicial que parte en $i = 1$ y termina en el caracter antes del primer corte. Y si la palabra termina con 3, entonces hay que añadir un bloque final que parte en el último corte y termina en el último caracter de i).
Con esto toda palabra de $\mathcal{L}$ se escribe como un bloque inicial (que puede ser vacío), una secuencia de bloques centrales (que puede ser vacía) y un bloque final.
El bloque inicial es una palabra en sin 3, es decir, palabra de

$$[2]^* := Seq(\{1,2\}),$$

el bloque final es una palabra con solo 3s, es decir, una palabra en

$$\{3\}^* = Seq(\{3\}).$$

Cada bloque central es una palabra que parte en uno o más símbolos 3, y luego cambia obligatoriamente a un 1 (pues w no contiene a 32 como subpalabra), y luego continua con símbolos que no son 3. Es decir, un bloque central es una palabra en

$$\{3\} \times \{3\}^* \times \{1\} \times [2]^*.$$

Con esto, deducimos que

$$\mathcal{L} = [2]^* \times (\{3\} \times \{3\}^* \times \{1\} \times [2]^*)^* \times \{3\}^*.$$

cuya FGO es

$$\begin{aligned} L(x) &= \frac{1}{1-2x} \cdot \frac{1}{1-(x \cdot \frac{1}{1-x} \cdot x \cdot \frac{1}{1-2x})} \cdot \frac{1}{1-x} \\ &= \frac{1}{(1-2x)(1-x)-x^2} = \frac{1}{1-3x+x^2}. \end{aligned}$$

Ejercicio 1. Pruebe que para todo $a, b \in [k]$, $a \neq b$, la FGO asociada al número de palabras en $[k]$ que no poseen la subsecuencia ab es $\frac{1}{1-kx+x^2}$

Otra forma de resolver el problema con el que partimos es crear una ecuación funcional para $\mathcal{L}$

1. Método simbólico para objetos etiquetados.

Ahora procederemos a dar un método para contar estructuras donde cada *átomo* tiene asociada una etiqueta numérica. Por ejemplo

1. Contar las particiones de $[n]$.

2. Contar las permutaciones de $[n]$.
3. Contar los árboles planares cuyos vértices reciben etiquetas distintas de $[n]$

La diferencia con los problemas vistos anteriormente radica en que ahora los objetos a contar están "etiquetados" por el conjunto $[n]$. En otras palabras recibimos un conjunto de n elementos (spg, $[n]$) y le damos alguna "estructura interna" (los ordenamos, partimos, asignamos a las hojas de un árbol, etc.)
En esta sección un "objeto" de tamaño n, será una estructura arbitraria (para fijar ideas, piensen en un "digrafo", es decir, un conjunto (V, E) donde $E \subseteq V \times V$) que tiene n vértices o átomos donde se pueden poner etiquetas.

Definición 59. Un objeto con n átomos está **debilmente etiquetado** si todos sus átomos reciben etiquetas distintas de $\mathbb{N}$. El objeto está **bien etiquetado** si el conjunto de etiquetas usadas es exactamente $[n]$.
Una **clase etiquetada** es una clase combinatorial que consiste de objetos bien etiquetados. Dos objetos cuyas etiquetas son distintas, también son distintos.

Resulta más conveniente usar funciones generatrices exponenciales (FGE) que funciones generatrices ordinarias para representar las sucesiones de conteo de una clase bien etiquetada. Respecto a notación. Si $\mathcal{A}$ es una clase etiquetada y a_n representa la cantidad de objetos (bien etiquetados) de tamaño n, entonces su FGE se denotará por

$$\hat{A}(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n/n!.$$

Advertencia: Los objetos sin etiquetas (o sea, de peso 0) a veces son considerados y a veces no (por ejemplo, normalmente se supone la existencia de la permutación vacía, pero no del ciclo vacío).

Algunas clases etiquetadas

1. Clase neutra: $\mathcal{E} = \{\varepsilon\}$ donde $w(\varepsilon) = 0$. Su FGE es $\hat{E}(x) = x^0 = 1$.
2. Clase atómica: $Z = \{\bullet\}$ donde $w(\bullet) = 1$. Su FGE es $\hat{Z}(x) = x$.
3. Clase de permutaciones: Cada permutación se puede representar como un digrafo $\pi(1) \to \pi(2) \to \pi(3) \to \cdots \to \pi(n)$. Su FGE es
$$\hat{P}(x) = \sum_{n\geq 0} n! x^n/n! = \frac{1}{1-x}.$$
4. Clase de urnas / conjuntos: Una urna es un conjunto de átomos cuyas etiquetas son distintas pero no hay relación entre ellos. Podemos pensarlo como los grafos (o digrafos) sin aristas. Su FGE es
$$\hat{S}(x) = \sum_{n\geq 0} 1 x^n/n! = \exp(x).$$
5. Clase de ciclos dirigidos o no dirigidos. La FGE para ciclos dirigidos es
$$\hat{C}(x) = \sum_{n\geq 1} (n-1)! x^n/n! = \sum_{n\geq 1} x^n/n = -\ln(1-x).$$
La clase de ciclos no dirigidos requiere algo de convención. Suponemos que no hay ciclos de largo 0 pero que si hay ciclos de largo 1 (un *loop*). Observamos que cada ciclo no dirigido de largo n se puede orientar de 2 formas para obtener un ciclo dirigido, excepto en el caso $n = 2$ donde hay una sola orientación.
Con esto
$$\hat{C}_N(x) = 1 + x^2 + \sum_{n\geq 3} (n-1)!/2 \cdot x^n/n!$$

Suma y Producto

La suma de clases etiquetadas se maneja igual que en el caso no etiquetado: Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son clases etiquetadas, $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ es la clase etiquetada obtenida al tomar su unión disjunta, la FGE de la clase suma es entonces $\hat{A}(x) + \hat{B}(x)$.
Para el producto, sin embargo, tenemos algunos problemas con las etiquetas. Por ejemplo si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son clases combinatoriales etiquetadas, $\alpha \in \mathcal{A}$, $\beta \in \mathcal{B}$ y tratamos de "pegarlos" para obtener un par ordenado (α, β) (como lo haría el producto

cartesiano), la etiqueta 1 podría aparecer 2 veces, uno en un átomo de α y una en un átomo de β. Así que tenemos que permitir **re-etiquetar** para crear un producto que devuelva una clase bien etiquetada.

En el caso no etiquetado, cuando tomábamos $\alpha \in \mathcal{A}$ y $\beta \in \mathcal{B}$, el par (α, β) era un objeto único de tamaño $|\alpha| + |\beta|$. (Es poner la estructura α al lado de β, como par ordenado).
En el caso etiquetado su "producto" generará un conjunto de objetos. Esencialmente el producto funciona como sigue: mantenemos la estructura (un par ordenado de estructuras) y generamos nuevas etiquetas que preserven el orden de las etiquetas en cada parte. Para explicarlo formalmente usamos la siguiente operación:

Reducción de etiquetas: Si γ es una estructura débilmente etiquetada con etiquetas $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$, la reducción de γ es la misma estructura pero cuyas etiquetas son cambiadas al intervalo $[n]$, manteniendo el orden relativo de las etiquetas originales. Por ejemplo, si las etiquetas son $(7, 5, 1, 4)$, al reducirlas estas se cambian a $(4, 3, 1, 2)$. Denotemos esta operacion como $\rho(\gamma)$.

Dados dos objetos bien etiquetados α y β. Su producto etiquetado $\alpha \star \beta$ es el conjunto.

$$\alpha \star \beta = \{(\alpha', \beta') \colon (\alpha', \beta') \text{ bien etiquetado y } \rho(\alpha') = \alpha, \rho(\beta') = \beta\}.$$

Ejemplo: Si α es el camino $1 \to 2$ y β es el ciclo dirigido (triángulo) $1 \to 2 \to 3 \to 1$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\alpha \star \beta = \{&(1 \to 2, \quad 3 \to 4 \to 5 \to 3),\\
&(1 \to 3, \quad 2 \to 4 \to 5 \to 2),\\
&(1 \to 4, \quad 2 \to 3 \to 5 \to 2),\\
&(1 \to 5, \quad 2 \to 3 \to 4 \to 2),\\
&(2 \to 3, \quad 1 \to 4 \to 5 \to 1),\\
&(2 \to 4, \quad 1 \to 3 \to 5 \to 1),\\
&(2 \to 5, \quad 1 \to 3 \to 4 \to 1),\\
&(3 \to 4, \quad 1 \to 2 \to 5 \to 1),\\
&(3 \to 5, \quad 1 \to 2 \to 4 \to 1),\\
&(4 \to 5, \quad 1 \to 2 \to 3 \to 1)\}
\end{aligned}$$

¿Cuántos elementos tiene $\alpha \star \beta$? Hay

$$\binom{|\alpha| + |\beta|}{|\alpha|, |\beta|}.$$

Pues de las $n = |\alpha| + |\beta|$ hay que elegir cuales van al objeto α (y son asignadas de manera única a sus vértices) y el resto son asignadas a β (de manera única).

En otras palabras $\alpha \star \beta$ es una clase combinatorial etiquetada que contiene exactamente

$$\binom{|\alpha| + |\beta|}{|\alpha|, |\beta|}$$

objetos, todos de largo $|\alpha| + |\beta|$. La FGE de $\alpha \star \beta$ es entonces

$$\binom{|\alpha| + |\beta|}{|\alpha|, |\beta|} \frac{x^{|\alpha|+|\beta|}}{(|\alpha| + |\beta|)!} = \frac{x^{|\alpha|+|\beta|}}{|\alpha|\,!\,|\beta|\,!}$$

Definición 60. Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son clases etiquetadas, definimos el **producto etiquetado de clases** $\mathcal{C} = \mathcal{A} \star \mathcal{B}$ como

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} \star \mathcal{B} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}, \beta \in \mathcal{B}} (\alpha \star \beta).$$

Usando el resultado anterior y la suma de clases combinatoriales concluimos que

$$\begin{aligned}
\hat{C}(x) &= \sum_{\alpha\in\mathcal{A},\beta\in\mathcal{B}} FGE(\alpha\star\beta;x) = \sum_{\alpha\in\mathcal{A},\beta\in\mathcal{B}} \frac{x^{|\alpha|+|\beta|}}{|\alpha|\,!\,|\beta|\,!} \\
&= \sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0}\sum_{\alpha\in\mathcal{A}:\ |\alpha|=n}\ \sum_{\beta\in\mathcal{B}:\ |\beta|=m} \frac{x^{n+m}}{n!m!} \\
&= \sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0} a_n b_m \frac{x^{n+m}}{n!m!} \\
&= \sum_{N\geq 0}\sum_{i=0}^{N} \frac{1}{i!(N-i)!} x^N a_i b_{n-1} \\
&= \sum_{N\geq 0}\sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} \frac{x^N}{N!} a_i b_{n-1}.
\end{aligned}$$

Notamos entonces que $C_N = \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} a_i b_{n-1}$ es la convolución binomial de a y b, es decir

$$\hat{C}(x) = \hat{A}(x)\cdot\hat{B}(x).$$

Veamos un ejemplo simple. Para calcular la clase combinatorial

$$\mathcal{C}_{(k)}$$

de los caminos dirigidos con exactamente k átomos, basta notar que cada camino no es más que un producto de la clase atómica con si misma exactamente k veces. Es decir.

$$\mathcal{C}_{(k)} = \underbrace{\mathcal{Z}\star\cdots\star\mathcal{Z}}_{k}$$

Y por lo tanto, su FGE es

$$\hat{\mathcal{C}}_{(k)} = x^k$$

Observamos que para extraer el número de caminos hay que tomar $[x^k/k!]\hat{\mathcal{C}_{(k)}} = k![x^k]x^k = k!$.

Clase 12

1. Operaciones en clases etiquetadas

Definiremos varias operaciones que se pueden usar para crear clases etiquetadas a partir de otras.
Sea $\mathcal{A}$ una clase etiquetada y sea $k \in \mathbb{N}$, definimos las clases:

$$\begin{aligned}\mathrm{SEQ}_k(\mathcal{A}) &= \text{Secuencias de } k \text{ objetos de } \mathcal{A}.\\ \mathrm{SET}_k(\mathcal{A}) &= \text{Conjuntos de } k \text{ objetos de } \mathcal{A}.\\ \mathrm{CYC}_k(\mathcal{A}) &= \text{Ciclos de } k \text{ objetos de } \mathcal{A}.\end{aligned}$$

y además, si $\mathcal{A}$ no tiene elementos de largo 0, podemos definir

$$\mathrm{SEQ}(\mathcal{A}) = \sum_{k\geq 0} \mathrm{SEQ}_k(\mathcal{A}), \qquad \mathrm{SET}(\mathcal{A}) = \sum_{k\geq 0} \mathrm{SET}_k(\mathcal{A}), \qquad \mathrm{CYC}(\mathcal{A}) = \sum_{k\geq 1} \mathrm{CYC}_k(\mathcal{A}).$$

Donde notamos que la suma para ciclos parte de 1 pues no consideramos ciclos de largo 0 (en otras palabras $\mathrm{CYC}_0(\mathcal{A})$ es una clase vacía).
Estudiemos las FGE asociadas a las clases recién definidas. Notamos que $\mathrm{SEQ}_k(\mathcal{A})$ no es más que el producto estrella de $\mathcal{A}$ consigo mismo k veces. Es decir $\mathrm{SEQ}_k(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^{\star k}$, y luego la FGE de $\mathrm{SEQ}_k(\mathcal{A})$ con variable x es $\hat{A}(x)^k$.
Por otro lado, cada conjunto β en $\mathrm{SET}_k(\mathcal{A})$ se puede reordenar de $k!$ maneras para obtener una secuencia (única) en $\mathrm{SET}_k(\mathcal{A})$ del mismo largo. Se concluye que

$$k!\hat{A}(x)^k = k! \sum_{\beta\in \mathrm{SEQ}_k(\mathcal{A})} \frac{x^{|\beta|}}{|\beta|!} = \sum_{\beta\in \mathrm{SET}_k(\mathcal{A})} \frac{x^{|\beta|}}{|\beta|!}$$

es decir, la FGE de $\mathrm{SET}_k(\mathcal{A})$ es $\hat{A}(x)^k/k!$.
Por otro lado, por cada ciclo de $\mathrm{CYC}_k(\mathcal{A})$ hay k maneras de obtener un secuencia, y luego, mediante un argumento similar al anterior, la FGE de $\mathrm{CYC}_k(\mathcal{A})$ es $\hat{A}(x)^k/k$.
Las FGE para secuencia, conjunto y ciclos se obtienen sumando las FGE recién encontradas, obteniéndose la siguiente tabla

Clase	FGE
$\mathrm{SEQ}_k(\mathcal{A})$	$\hat{A}(x)^k$
$\mathrm{SET}_k(\mathcal{A})$	$\frac{\hat{A}(x)^k}{k!}$
$\mathrm{CYC}_k(\mathcal{A})$	$\frac{\hat{A}(x)^k}{k}$
$\mathrm{SEQ}(\mathcal{A})$	$\sum_{k\geq 0} \hat{A}(x)^k = \frac{1}{1-\hat{A}(x)}$
$\mathrm{SET}(\mathcal{A})$	$\sum_{k\geq 0} \frac{\hat{A}(x)^k}{k!} = \exp(\hat{A}(x))$
$\mathrm{CYC}(\mathcal{A})$	$\sum_{k\geq 0} \frac{\hat{A}(x)^k}{k} = \ln\left(\frac{1}{1-\hat{A}(x)}\right)$

Observación 15. Es importante destacar que en el mundo etiquetado solo existe un operador SET, mientras que en el no etiquetado existen 2, PSET y MSET. La diferencia radica en que en el mundo etiquetado es imposible tener un multiconjunto con 2 o más objetos iguales: debido a que la clase es bien etiquetada, los objetos reciben etiquetas distintas y luego no pueden ser iguales. Por otro lado, la operación Set se comporta de manera distinta a PSET ya que SET nos permite tener múltiples *copias* de un mismo átomo (pero con distintas etiquetas).

En lo que sigue, abusaremos notación y definiremos clases tales como

$$\mathrm{SET}_{\leq k}(\mathcal{A}),\ \mathrm{SEQ}_{\geq k}(\mathcal{A}),\ \mathrm{CYC}_{\{3,4,5\}}(\mathcal{A}),$$

donde el significado resulta ser el natural: conjuntos de tamaño a lo más k, secuencias de tamaño al menos k y ciclos de tamaños 3, 4 y 5 respectivamente.
Observando la tabla con cuidado descubrimos que para toda clase etiquetada $\mathcal{A}$, la FGE de SET(CYC($\mathcal{A}$)) es

$$\exp\Big(\ln\Big(\frac{1}{1-\hat{A}(x)}\Big)\Big) = \frac{1}{1-\hat{A}(x)},$$

lo que coincide con la FGE de SEQ($\mathcal{A}$). De lo anterior se concluye la siguiente identidad fundamental.

Lema 78. *Para toda clase etiquetada $\mathcal{A}$ sin elementos de largo 0,*

$$\mathrm{SET}(\mathrm{CYC}(\mathcal{A})) = \mathrm{SEQ}(\mathcal{A})$$

2. Aplicaciones.

Permutaciones Una permutación de $[n]$ se puede ver como el producto estrella de n átomos. En otras palabras, la clase $\mathcal{P}$ de permutaciones es

$$\mathcal{P} = \mathrm{SEQ}(\{\bullet\})$$

con FGE

$$\frac{1}{1-x}$$

Observamos, que el número de permutaciones es

$$[x^n/n!](1-x)^{-1} = n![x^n]\sum_{m\geq 0} x^m = n!.$$

Por otro lado, la identidad fundamental nos dice que toda secuencia de átomos es también un conjunto de ciclos. Efectivamente, una permutación se puede interpretar como el conjunto de los ciclos (en el sentido funcional) que lo conforman.

$$\mathcal{P} = \mathrm{SET}(\mathrm{CYC}(\{\bullet\})$$

La interpretación de una permutación como conjuntos de ciclos resulta útil al momento de estudiar permutaciones especiales.

Desarreglos Un desarreglo de $[n]$ es una permutación sin puntos fijos. Veamos dos maneras de deducir su FGE.
De acuerdo a su descomposición en ciclos, un desarreglo no tiene ciclos de largo 1 (puntos fijos). En otras palabras, $\mathcal{D}$ corresponde a conjuntos de ciclos de largos 2 o más.
Concluimos que

$$\mathcal{D} = \mathrm{SET}(\mathrm{CYC}_{\geq 2}(x))$$

Usando que la FGE de $\mathrm{CYC}_{\geq 2}(x)$ es $\ln(\frac{1}{1-x}) - x$, se concluye que la FGE de los desarreglos es

$$\hat{D}(x) = \exp\Big(\ln\Big(\frac{1}{1-x}\Big) - x\Big) = \frac{\exp(-x)}{1-x}.$$

Demos una segunda forma de deducir esta FGE de manera implícita. Notemos que toda permutación se puede describir indicando su conjunto de puntos fijos y, por separado, un desarreglo entre sus puntos no fijos. En otras palabras,

$$\mathcal{P} = \mathrm{SET}(\{\bullet\}) \times \mathcal{D},$$

lo que se transforma en,

$$\hat{P}(x) = \exp(x) \cdot \hat{D}(x),$$

despejando se tiene

$$\hat{D}(x) = \exp(-x)\hat{P}(x) = \frac{\exp(-x)}{1-x}.$$

Concluimos de cualquier forma que el número de desarreglos de $[n]$ es

$$d_n = n![x^n]\frac{\exp(-x)}{1-x} = n![x^n]\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k x^k}{k!}\cdot\sum_{k\geq 0}x^k = n!\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j!}.$$

Involuciones Una involución es una permutación cuyo cuadrado es la identidad, o bien, que es autoinversa. Llamemos $\mathcal{I}$ a su clase etiquetada.
Es fácil ver que todos los ciclos de una involución deben tener largo 1 o 2. Luego la clase de involuciones corresponde a la clase de conjuntos de ciclos de largo 1 o 2. Concluimos que

$$\mathcal{I} = \mathrm{SET}(\mathrm{CYC}_{\leq 2}(\{\bullet\}))$$

Usando que la FGE de $\mathrm{CYC}_{\leq 2}(x)$ es $x + x^2/2$ tenemos que

$$\hat{I}(x) = \exp(x + x^2/2),$$

lo cual es igual a

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 0}\frac{x^k}{k!}(1+x/2)^k &= \sum_{k\geq 0}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{x^{k+j}}{2^j k!}\\ &= \sum_{n\geq 0}\sum_{j=0}^{n}\binom{n-j}{j}\frac{x^n}{2^j(n-j)!}\end{aligned}$$

Luego, el numero de involuciones de $[n]$ es

$$n!\sum_{j=0}^{n}\binom{n-j}{j}\frac{1}{2^j(n-j)!} = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{n!}{2^j j!(n-2j)!}$$

Otras permutaciones interesantes Usando el mismo método de antes se puede deducir que la clase de permutaciones que son raíz p-ésima de la identidad, donde p es primo, es

$$\mathrm{SET}(\mathrm{CYC}_{1,p}(\{\bullet\})),\ \text{con FGE}\ \exp(x + x^p/p!).$$

y en general, las raíces k-ésimas de la identidad con $k \in \mathbb{N}$ son

$$\mathrm{SET}(\mathrm{CYC}_{q:\,q|k}(\{\bullet\})),\ \text{con FGE}\ \exp(\sum_{q|k} x^q/q!).$$

Usando el principio de inclusión-exclusión es posible también encontrar la clase de permutaciones que tienen orden exactamente k, es decir aquellas π tales que $\pi^k = \mathrm{id}$ y $\pi^\ell \neq \mathrm{id}$ para $\ell \in [k-1]$.
Una clase de permutación importante es la que corresponde a aquellas con exactamente k ciclos. Esta es

$$\mathrm{SET}_k(\mathrm{CYC}(\{\bullet\})), \text{con FGE}\ \frac{\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)^k}{k!}$$

recordando que los números de Stirling sin signo $\left[{n \atop k}\right]$ cuentan exactamente las permutaciones con k ciclos, deducimos que para k fijo,

$$\sum_{n\geq 0}\left[{n \atop k}\right]\frac{x^n}{n!} = \frac{\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)^k}{k!}.$$

Particiones de conjuntos Consideremos ahora la clase $\mathcal{Q}$ de particiones de un conjunto. Como los bloques no pueden ser vacíos, se tiene que

$$\mathcal{Q} = \mathrm{SET}(\mathrm{SET}_{\geq 1}(\{\bullet\})$$

con FGE

$$\hat{Q}(x) = \exp(\exp(x) - 1) = \sum_{n\geq 0} B(n)\frac{x^n}{n!},$$

donde la última igualdad resulta del hecho que los números de Bell $B(n)$ cuentan las particiones de $[n]$.
Notando que la FGE de $B(n)$ converge en los complejos, tenemos la siguiente fórmula de Dobinsky

$$B(n) = n![x^n]\exp(e^x - 1) = \frac{1}{e}\sum_{k\geq 0}\frac{k^n}{k!}.$$

Por otro lado, podemos estudiar la clase que corresponde a las particiones con exactamente k bloques, ésta es

$$\mathrm{SET}_k(\mathrm{SET}_{\geq 1}(\{\bullet\}),$$

con FGE

$$\frac{\Big(\exp(x) - 1\Big)^k}{k!} = \sum_{n\geq 0} S(n,k)\frac{x^n}{n!}.$$

Asignaciones de pelotas distinguibles en cajas. La clase de particiones en exactamente k bloques corresponde a la clase de asignaciones de **pelotas a k urnas indistinguibles** de manera sobreyectiva.
Procediendo de manera similar, se puede verificar que para k fijo:
La clase etiquetada de asignaciones de **pelotas a k urnas indistinguibles** (cuyo largo es el número de pelotas) sin restricción de sobreyectividad es

$$\mathrm{SET}_k(\mathrm{SET}(\{\bullet\}))$$

La clase etiquetada de asignaciones de **pelotas a k urnas indistinguibles** (cuyo largo es el número de pelotas) de manera inyectiva es

$$\mathrm{SET}_k(\mathrm{SET}_{0,1}(\{\bullet\})).$$

La clase etiquetada de asignaciones de **pelotas a k urnas distinguibles** (cuyo largo es el número de pelotas) irrestrictas es

$$\mathrm{SEQ}_k(\mathrm{SET}(\{\bullet\})).$$

La clase etiquetada de asignaciones de **pelotas a k urnas distinguibles** (cuyo largo es el número de pelotas) de manera sobreyectiva es

$$\mathrm{SEQ}_k(\mathrm{SET}_{\geq 1}(\{\bullet\})).$$

La clase etiquetada de asignaciones de **pelotas a k urnas distinguibles** (cuyo largo es el número de pelotas) de manera inyectiva es

$$\mathrm{SEQ}_k(\mathrm{SET}_{0,1}(\{\bullet\})).$$

Clase 13

1. Usando el método simbólico para contar grafos 1 y 2 regulares

Un grafo simple $G = (V, E)$ es un par ordenado donde V es un conjunto finito de vértices (o átomos en este contexto) y $E \subseteq \binom{V}{2}$ es un conjunto de aristas.
Llamamos grado de v en G, al número de aristas de E que contienen al vértice v, y se denota $\deg(v)$. Decimos que un grafo es k-regular si todos sus vértices tienen grado exactamente igual a k.
Los grafos 1-regulares son simples de describir: cada vértice debe pertenecer a exactamente 1 arista, luego los vértices resultan estar emparejados. Un nombre alternativo para grafo 1-regular es el de emparejamiento perfecto.
Por otro lado un grafo 2-regular es una colección disjunta de ciclos no dirigidos.
Calculemos cuantos grafos 1-regulares y 2-regulares hay con $V = [n]$. Para esto definamos las clases combinatoriales de arista: $\mathcal{A}$ y de ciclo no dirigido $\mathcal{C}$.
$\mathcal{A}$ es una clase que contiene un único elemento $(1-2)$, de largo 2. Luego

$$\hat{A}(x) = x^2/2.$$

Por otro lado, para todo $k \geq 3$, $\mathcal{C}$ contiene exactamente $(k-1)!/2$ ciclos de largo k (notamos que el factor $1/2$ viene del hecho que el ciclo es no dirigido). Luego

$$\hat{C}(x) = \sum_{k\geq 3} \frac{(k-1)!}{2}\frac{x^k}{k!} = \frac{1}{2}\sum_{k\geq 3}\frac{x^k}{k} = \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) - x - \frac{x^2}{2}\right)$$

Finalmente, llamemos $\mathcal{G}_i$, para $i \in [2]$ a la clase de los grafos i-regulares. Con esto tenemos que

$$\mathcal{G}_1 = \text{SET}(\mathcal{A}), \text{ con FGE } \hat{G}_1(x) = \exp(x^2/2)$$

y

$$\mathcal{G}_2 = \text{SET}(\mathcal{C}), \text{ con FGE } \hat{G}_2(x) = \exp\left(-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4}\right)\frac{1}{(1-x)^{1/2}}.$$

De aquí, si $g_1(n)$ y $g_2(n)$ cuentan el número de grafos 1 y 2 regulares en $[n]$ se concluye que

$$g_1(n) = n![x^n]\exp(x^2/2) = n![x^n]\sum_{k\geq 0}\frac{x^{2k}}{2^{2k}k!} = [\![n\text{par}]\!]\frac{n!}{(n/2)!2^{n/2}},$$

y

$$g_2(n) = n![x^n]\exp\left(-x/2 - x^2/4\right)(1-x)^{-1/2}$$

cuya simplificación queda propuesta.

2. Funciones generatrices bivariadas y clases combinatoriales con costo

Sea $\mathcal{A}$ una clase combinatorial etiquetada o no etiquetada, donde cada elemento $\alpha \in \mathcal{A}$ además de tener largo $|\alpha| \in \mathbb{N}$ tiene un costo $\text{cost}(\alpha) \in \mathbb{N}$.

Llamamos función generatriz bivariada ordinaria (FGBO) de $\mathcal{A}$ a la serie formal en $\mathbb{C}[[x,u]]$

$$A(x,u) = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} x^{|\alpha|}u^{\mathrm{cost}(\alpha)} = \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0} a_{n,k}x^n u^k,$$

donde $a_{n,k} = |\{\alpha\in\mathcal{A}\colon |\alpha| = n, \mathrm{cost}(\alpha) = k\}|$.
Si la clase es etiquetada, es más conveniente trabajar con su función generatriz bivariada exponencial (FGBE)

$$\hat{A}(x,u) = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \frac{x^{|\alpha|}}{|\alpha|!}u^{\mathrm{cost}(\alpha)} = \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0} a_{n,k}\frac{x^n}{n!}u^k.$$

Notar que $\hat{A}(x,u)$ es exponencial respecto a x y ordinaria respecto a u.
Usaremos las FGB para deducir fórmulas para costos promedios de estructuras. Observemos que al derivar A con respecto a u se obtiene

$$A_u(x,u) = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathrm{cost}(\alpha)x^{|\alpha|}u^{\mathrm{cost}(\alpha)-1}$$

Si evaluamos la expresión anterior en $u=1$ y extraemos el coeficiente de x^n se obtiene

$$[x^n]A_u(x,1) = [x^n]\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathrm{cost}(\alpha)x^{|\alpha|} = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}\colon |\alpha|=n} \mathrm{cost}(\alpha),$$

que corresponde al **costo total de las estructuras de largo n.**
Por otro lado,

$$[x^n]A(x,1) = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}\colon |\alpha|=n} 1,$$

es el **número de estructuras de largo n.**
Con esto concluimos el siguiente resultado.

Proposición 79. *El costo promedio de las estructuras de largo n de una clase combinatorial con costo $\mathcal{A}$ es*

$$\frac{[x^n]A_u(x,1)}{[x^n]A(x,1)},$$

si la clase es no etiquetada, o

$$\frac{[x^n/n!]\hat{A}_u(x,1)}{[x^n/n!]\hat{A}(x,1)} = \frac{[x^n]\hat{A}_u(x,1)}{[x^n]\hat{A}(x,1)},$$

si la clase es etiquetada.

Interesantemente, podemos usar el método simbólico directamente en clases combinatoriales con costo. Estudiemos algunas clases combinatoriales con costo simples.

Palabras Binarias Consideremos la clase $\mathcal{B}$ de todas las palabras en $\{0,1\}$ donde el largo de una palabra es el número de símbolos que la componen y el costo es el número de 1.
Para definir $\mathcal{B}$, notamos que como 0 tiene largo 1 y costo 0, la clase atómica $\{0\}$ tiene FGBO $x^1u^0 = x$. Similarmente, $\{1\}$ tiene FGBO $x^1u^1 = xu$.
Usando que $\mathcal{B} = \mathrm{SEQ}(\{0\}+\{1\})$, se concluye que la FGBO de $\mathcal{B}$ es

$$B(x,u) = \frac{1}{1-(x+xu)}$$

Recordando que el número de palabras de largo n en $\{0,1\}$ con exactamente k símbolos 1 es $\binom{n}{k}$ deducimos que

$$\sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}x^n u^k = \frac{1}{1-x-xu} = B(x,u).$$

Calculemos el número promedio de 1 que tiene una palabra de largo n en esta clase. Para esto, notamos que

$$\begin{aligned} B_u(x,1) &= \left.\frac{x}{(1-x-xu)^2}\right|_{u=1} = \frac{x}{(1-2x)^2} \\ &= x\sum_{k\geq 0}\binom{-2}{k}(-2x)^k = x\sum_{k\geq 0}\left(\!\!\binom{2}{k}\!\!\right)(2x)^k \\ &= x\sum_{k\geq 0}\binom{2+k-1}{k}(2x)^k = \sum_{k\geq 0}(k+1)2^k x^{k+1}, \end{aligned}$$

de lo cual,

$$[x^n]B_u(x,1) = n2^{n-1}.$$

Similarmente,

$$[x^n]B(x,1) = [x^n]\frac{1}{1-2x} = [x^n]\sum_{k\geq 0}2^k x^k = 2^n.$$

Por lo tanto el número promedio de unos (costo promedio) de una palabra de largo n es

$$\frac{[x^n]B_u(x,1)}{[x^n]B(x,1)} = \frac{n2^{n-1}}{2^n} = \frac{n}{2}.$$

Es cierto que en este caso, la cantidad $n/2$ se pudo haber deducido con métodos mucho más simples (simetría, linealidad de la esperanza, etc.), pero lo anterior resulta ser buen ejemplo para el método general.

Árboles Planos estrictamente binarios (no necesariamente enraizados) Un árbol plano estrictamente binario (APEB) es una estructura de nodos, que puede ser vacía, en la cual cada nodo tiene exactamente dos hijos: un hijo izquierdo y un hijo derecho, donde ambos son APEB. Una hoja de un APEB es un nodo donde ambos hijos son APEB vacíos. Consideremos la clase $\mathcal{T}$ de APEB donde el largo de un árbol es su número de nodos y el costo del mismo es su número de hojas.
Si denotamos por $\square$ a los átomos hojas y por $\bullet$ a los nodos internos (no hojas), podemos escribir la siguiente ecuación para $\mathcal{T}$.

$$\mathcal{T} = \{\varepsilon\} + \{\square\}\times\{\varepsilon\}\times\{\varepsilon\} + \{\bullet\}\times\mathcal{T}\times\mathcal{T} - \{\bullet\}\times\{\varepsilon\}\times\{\varepsilon\}.$$

Esto se debe a que un árbol es, o bien vacío, o bien una hoja de la que cuelgan dos árboles vacíos, o bien un nodo interno del que cuelgan dos árboles, pero no pueden ser ambos vacíos (por lo que se descuenta esa opción).
Usando que $\{\square\}$ tiene FGBO xu y que $\{\bullet\}$ tiene FGBO x se concluye que

$$T(x,u) = 1 + xu + xT(x,u)^2 - x.$$

De esta ecuación implícita se deduce que

$$T(x,1) = 1 + xT(x,1)^2,$$

o bien

$$xT(x,1)^2 - T(x,1) + 1$$

Luego, usando el teorema del binomio y la identidad $\binom{1/2}{n} = \frac{(-1)^{n+1}}{4^n(2n-1)}\binom{2n}{n}$ se deduce que

$$\begin{aligned} T(x,1) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} &= -\frac{1}{2x}\sum_{n\geq 1}\binom{1/2}{n}(-4x)^n = \frac{1}{2x}\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{(2n-1)}\binom{2n}{n} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{2n+1}\binom{2n+2}{n+1} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{2n+1}\frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)!^2} \\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n+1}\binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

Por lo que el número de estructuras de largo n es $[x^n]T(x,1) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ que corresponde al n-ésimo número de Catalán.
Por otro lado, derivando la ecuación implícita para T con respecto a u se obtiene

$$T_u(x,u) = x + 2xT(x,u)T_u(x,u)$$

Por lo tanto

$$T_u(x,1) = \frac{x}{1-2xT(x,1)} = \frac{x}{\sqrt{1-4x}}.$$

Usando teorema del binomio y la identidad $\binom{-1/2}{n} = \frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n}$ se deduce que

$$T_u(x,1) = x\sum_{n\geq 0}\binom{-1/2}{n}(-4x)^n = \sum_{n\geq 0}\binom{2n}{n}x^{n+1}.$$

Por lo que el costo total de las estructuras de largo n es $[x^n]T_u(x,1) = \binom{2n-2}{n-1}$.
Concluimos que el número promedio de hojas de un APEB de n nodos es

$$\frac{[x^n]T_u(x,1)}{[x^n]T(x,1)} = \frac{\binom{2n-2}{n-1}}{\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}} = \frac{n(n+1)}{2(2n-1)}$$

por lo que la fracción promedio de hojas que posee un ABEB de n nodos es

$$\frac{(n+1)}{2(2n-1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{4},$$

es decir, para n grande, aproximadamente 1/4 de los nodos de un ABEB son hojas.
El método anterior permite trabajar también con estructuras etiquetadas. Como ejercicio se propone calcular el número de ciclos promedio de una permutación de $[n]$.