MA4006-1 Combinatoria
Profesores: José Soto S. y Martín Matamala V.
Auxiliar: Arturo Merino F.

Pauta Auxiliar 6

24 de abril del 2016

P1. **[Números de Catalán]**
Consideremos la siguiente definición recursiva de los expresiones bien balanceadas:

- ε es un expresión bien balanceado.
- Si P es una expresión bien balanceada, entonces (P) también lo es.
- Si P y Q son expresiones bien balanceadas, entonces PQ también lo es.

Recordemos que C_n es el número de expresiones bien balanceadas con n paréntesis cerrados.

a) Demuestre que C_n satisface:

$$C_0 = 1 \qquad C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}$$

b) A partir de lo anterior, encuentre una ecuación para $C(x)$. Donde $C(x)$ es la FGO de C_n.

c) Encuentre la misma ecuación anterior a partir del método simbolico.

d) De una fórmula cerrada para C_n.

Solución 1.

a) Notemos que el problema de la presentación que nos dan de los paréntesis bien balanceados (desde ahora $\mathcal{C}$) es que resulta en factorizaciones no únicas de estos, esto es malo pues sobrecontariamos al buscar una recurrencia. Por ejemplo ()()() puede ser obtenido de maneras distintas como la concatenación de elementos $P, Q \in \mathcal{C}$. Demostraremos que la siguiente presentación:

- $\varepsilon \in \mathcal{C}$
- $P, Q \in \mathcal{C} \implies (P)Q \in \mathcal{C}$)

genera todo $\mathcal{C}$ y además es única. Notemos que todo parentesis de esta presentación es bien balanceado (pues se deduce de las reglas $P, Q \in \mathcal{C} \implies (P) \in \mathcal{C} \implies (P)Q \in \mathcal{C}$. Sea ahora un paréntesis bien balanceado, notemos que este string o es ε o parte con un paréntesis abierto si parte con un paréntesis abierto existe un paréntesis que cierra este, luego nuestro string es de la forma $(P)Q$ que era lo buscado, además de esto vemos que esta presentación es única pues cada string bien balanceado posee un único parentesis que cierra al primer paréntesis y esto define completamente la factorización. Para ver la recurrencia notemos que es claro que $C_0 = 1$. Para lo segundo ver que un string de largo $n+1$ es de la forma $(P)Q$. Notemos que si) es el $k+1$ paréntesis derecho P se puede escojer de C_k formas y Q se puede escojer de C_{n-k} formas, variando el k obtenemos que:

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$$

Que era lo pedido.

b) Notemos que de lo anterior tenemos:

$$C_{n+1}x^{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i} x^{n+1}$$

Sumando esto para todo n tenemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} C_{n+1}x^{n+1} &= x\sum_{n\geq 0}\sum_{i=0}^{n} C_iC_{n-i}x^n \\
C(x) - C_0 &= x\sum_{n\geq 0}(C*C)_n x^n \\
C(x) - 1 &= xC(x)^2
\end{aligned}$$

c) Notemos que de la descripción que sacamos en *a*) la clase de los paréntesis bien balanceados la podemos describir como:

$$\mathcal{C} = \{\varepsilon\} + \{(\} \times \mathcal{C} \times \{)\} \times \mathcal{C}$$

Pues los paréntesis balanceados o son la palabra vacía o bienen de la regla $P, Q \in \mathcal{C} \implies (P)Q \in \mathcal{C}$. Notemos que (tiene peso 0. Luego:

$$C(x) = 1 + 1\cdot C(x)\cdot x \cdot C(x)$$

De donde llegamos a la misma ecuación que antes.

d) Resolviendo la cuadratica tenemos:

$$C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

Veamos a que corresponde $\sqrt{1-4x}$. Por binomio generalizado:

$$\begin{aligned}
(1-4x)^{1/2} &= \sum_{n\geq 0}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-4x)^n \\
&= 1 + \sum_{n\geq 1}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\underline{n}}}{n!}(-4^n)x^n \\
&= 1 + \sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^n}\frac{1\cdot(1-2)\cdot(1-4)\dots(1-[2n-2])}{n!}(-4^n)x^n \\
&= 1 - \sum_{n\geq 1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-3)}{n!}2^n x^n \\
&= 1 - \sum_{n\geq 1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-3)}{n!}\frac{2\cdot 4\cdot 6\dots(2n-2)}{2\cdot 4\cdot 6\dots(2n-2)}2^n x^n \\
&= 1 - \sum_{n\geq 1}\frac{(2n-2)!}{n!}\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}2^n x^n \\
&= 1 - \sum_{n\geq 1}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}\frac{2}{n}x^n \\
&= 1 - \sum_{n\geq 1}\binom{2n-2}{n-1}\frac{2}{n}x^n \\
&= 1 - \sum_{n\geq 0}\binom{2n}{n}\frac{2}{n+1}x^{n+1} \\
&= 1 - 2x\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n
\end{aligned}$$

Obs: Se separa el caso $n = 0$ pues queda un producto vacío en el lado derecho.

Notemos que si el numerador fuera $1+\sqrt{1-4x}$ tendriamos termino constante no nulo, lo que no es posible pues estamos dividiendo por x. Luego:

$$\begin{aligned} C(x) &= \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \\ &= \frac{2x\sum\limits_{n\geq 0}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n}{2x} \\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n \end{aligned}$$

De esto tenemos que $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

P2. Encuentre mediante el método simbólico:

a) El número de palabras de largo n sobre $\{0,1,2\}$ no tienen dos símbolos iguales consecutivos

b) El número de palabras binarias que no contiene dos ceros consecutivos.

c) Una palabra se dirá *de cumpleaños* si no tiene letras repetidas. Cuente las palabras de cumpleaños sobre $[m]$ con n caracteres.

d) Sea $A \subseteq \mathbb{N}$. Encuentre la FGO del número de composiciones de n tal que cada parte pertenece a A.

Solución 2.

a) Definamos $\mathcal{L}$ como la clase combinatorial de las palabras buscadas y $\mathcal{L}_i$ como las palabras buscadas que parten con $i \in \{0,1,2\}$. Tenemos entonces las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \{\varepsilon\} + \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \\ \mathcal{L}_0 &= \{0\} \times (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \{\varepsilon\}) \end{aligned}$$

Luego en FGO tenemos:

$$\begin{aligned} L(x) &= 1 + L_0(x) + L_1(x) + L_2(x) \\ L_0 &= x(L_1(x) + L_2(x) + 1) \end{aligned}$$

Por simetría para la segunda tenemos que:

$$L_0(x) = x(2L_0(x) + 1) \implies L_0(x) = \frac{x}{1-2x}$$

Por tanto tenemos que para $L(x)$:

$$\begin{aligned} L(x) &= 1 + 3L_0(x) \\ &= 1 + \frac{3x}{1-2x} \\ &= (1+x)\frac{1}{1-2x} \\ &= \sum_{n\geq 0} 2^n x^n + \sum_{n\geq 0} 2^n x^{n+1} \end{aligned}$$

Luego $l_0 = 1$ y $l_n = 2^n + 2^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1}$ para todo $n \geq 1$.

b) Este lenguaje lo podemos especificar como:

$$\mathcal{L} = \{\varepsilon, 0\} + \mathcal{L} \times \{1, 10\}$$

En FGO tenemos:

$$L(x) = 1 + x + L(x)(x + x^2) \implies L(x) = \frac{1+x}{1-x-x^2}$$

Trabajando esto último:

$$\begin{aligned} L(x) &= \frac{1}{x}\frac{x}{1-x-x^2} + \frac{x}{1-x-x^2} \\ &= \frac{1}{x}\sum_{n\geq 1} f_n x^n + \sum_{n\geq 0} f_n x^n \\ &= \sum_{n\geq 1} f_n x^{n-1} + \sum_{n\geq 0} f_n x^n \\ &= \sum_{n\geq 0} f_{n+1} x^n + \sum_{n\geq 0} f_n x^n \end{aligned}$$

Luego $l_n = f_{n+1} + f_n = f_{n+2}$

c) En este proceso se identifican los objetos, luego nuestras clases son etiquetadas. Notemos que cada una de estas secuencias se ve como m elecciones de insertar o no el simbolo, esto es:

$$\mathcal{L} = \mathrm{SEQ}_m(\{\varepsilon\} + \mathbb{Z})$$

Luego:

$$L(x) = (1+x)^m = \sum_{n \geq 0} \binom{m}{n} x^n$$

Por tanto:

$$l_n = \left[\frac{x^n}{n!}\right] L(x) = n! \binom{m}{n} = m^{\underline{n}}$$

d) Sea $\mathcal{C}$ la clase combinatorial buscada. Buscamos una secuencia de elementos de A tal que sumen n. Esta vez nuestros átomos son los elementos de A y su peso es el número de cada elemento, luego:

$$\mathcal{C} = \mathrm{SEQ}(\mathcal{A})$$

Luego:

$$C(x) = \frac{1}{1 - A(x)} = \frac{1}{1 - \sum\limits_{a \in A} x^a}$$

P3. [Árboles]
Encuentre, mediante el método simbólico:

a) La FGO de los arboles binarios planos completos con n nodos internos.

b) La FGO de los arboles trinarios planos completos con n hojas.

c) La FGO de árboles enraizados planos etiquetados con n nodos.

d) Un árbol se dirá $2-3$ si todo nodo interno tiene 2 o 3 hijos. Encuentre una ecuación funcional para los árboles 2-3 planos con n hojas.

Solución 3.

a) Notemos que todo árbol es o bien una hoja sola (raíz) o dos árboles conectados mediante una raíz (nodo interno). Luego:

$$\mathcal{T} = \{\text{Nodo Externo}\} + \mathcal{T} \times \{\text{Nodo Interno}\} \times \mathcal{T}$$

Como estamos contando por nodos internos el nodo externo tiene peso 0. Luego:

$$T(x) = 1 + xT(x)^2$$

De esto vemos que $T_n = C_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) Analogamente en este caso todo árbol es o bien una hoja sola o tres árboles conectados mediante una raíz. Luego:

$$\mathcal{T} = \{\text{Hoja}\} + \mathcal{T} \times \{\text{Nodo Interno}\} \times \mathcal{T} \times \mathcal{T}$$

Luego:

$$T(x) = x + T(x)^3$$

c) Notemos que este se puede ver como que todo árbol es una raíz y una secuencia de árboles de manera que la estructura de las etiquetas se preserve. Luego:

$$\mathcal{T} = \mathbb{Z} \star \text{SEQ}(\mathcal{T})$$

En funciones generatrices exponenciales:

$$T(x) = \frac{x}{1 - T(x)} \implies T(x) - T(x)^2 = x$$

d) Los árboles $2-3$ balanceados son o un nodo o reemplazar las hojas por dos nodos o tres nodos. Luego:

$$\mathcal{T} = \{\text{Nodo}\} + \mathcal{T} \circ \{2 \text{ Nodos}, 3 \text{ Nodos}\}$$

Luego:

$$T(x) = x + T(x^2 + x^3)$$

P4. [Caminos de Dyck]

a) Una camino en $\mathbb{Z}^2$ se dirá de Dyck de largo k si:

- Es una secuencia de k pasos subir $(+1,+1)$ y k pasos bajar $(+1,-1)$ que llamaremos u y d respectivamente.
- Parte en el origen y se mantiene en el cuadrante positivo.
- Termina en el eje x (lo puede tocar varias veces).

Cuente mediante el método simbólico el número de caminos de Dyck de largo k.

b) Llamaremos "meandro" o "serpenteo" de largo k a una secuencia de k pasos u y d que siempre se mantiene en el cuadrante no negativo, pero no necesita terminar en el origen.
Cuente el número de meandros de largo k.

c) Llamaremos "puente" a toda secuencia de k pasos u y d que parte y termina en el origen.
Cuente el número de puentes de largo k.

d) Concluya una expresión para la probabilidad que un paseo aleatorio de largo k en la recta que parte en el origen, se mueve hacia la izquierda y derecha con probabilidad $1/2$ en cada paso, termine en el origen.

Solución 4.

a) Sea $\mathcal{D}$ la clase de los caminos de Dyck contadas por largo, luego:

$$\mathcal{D} = \{\varepsilon\} + (u \times \mathcal{D} \times d) \times \mathcal{D}$$

En FGO tenemos:

$$D(x) = 1 + x^2 D(x)^2$$

Resolviendo la cuadratica queda:

$$D(x) = (1 \pm \sqrt{1-4x^2})/2(x^2)$$

Por el mismo argumento que con Catalan tenemos que descartamos el signo positivo. Además si recordamos que:

$$C(x) = (1-\sqrt{1-4x})/(2x)$$

concluimos que $[x^{2n}]C(x) = [x^n]D(x)$, es decir, $D_n = C_{2n}$

b) Sea $\mathcal{M}$ la clase de Meandros. Notemos que todo Meandro se puede escribir como un camino de Dyck (puede ser ε) o un camino de Dyck concatenado a un camino que parte en el origen, sube una vez, y nunca vuelve a tocar al origen (este puede ser por lo menos u), esto último es justamente u concatenado a un meandro. Luego:

$$\mathcal{M} = \mathcal{D} + \mathcal{D} \times \{u\} \times \mathcal{M} = \mathcal{D} \times (\{\varepsilon\} + \{u\} \times \mathcal{M})$$

De esto:

$$M(x) = D(x)(1 + xM(x)) \implies M(x) = \frac{D(x)}{(1 - xD(x))}$$

c) Sea $\mathcal{P}$ la clase de puentes. Notemos que todo puente es una secuencia de caminos de Dyck y caminos de Dyck reflejados (o bajo el origen). Sea $\mathcal{T}$ la clase de caminos de Dyck no vacios y $\mathcal{T}'$ los caminos de Dyck reflejados no vacios. Tenemos que

$$\mathcal{P} = \mathrm{SEQ}(\mathcal{T} + \mathcal{T}')$$

En terminos de FGO $P(x) = \frac{1}{(1-2T(x))}$, donde $T(x) = D(x) - 1$.
Usando la ecuacion funcional que teniamos para $D(x)$:

$$2T(x) = 2(D(x) - 1) = 2x^2 D(x)^2 = 1 - \sqrt{1-4x^2}$$

Luego:

$$P(x) = (1-4x^2)^{-1/2} = Sum_n \binom{-1/2}{n} - 4x^{2n}$$

Por un calculo ánalogo al de la **P1.**:

$$P_n = \binom{-1/2}{n}(-4)^n = \binom{2n}{n}$$

.

d) Notando la biyección entre los puentes y dichos caminos tenemos que el número de caminos de largo $2k$ que terminan en el origen es $\binom{2k}{k}$, además el número de caminos de largo $2k-1$ que terminan en el origen es 0. Luego si X_n es la variable aleatoria que indica la posición del paseo aleatorio en el tiempo n tenemos que:

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{-2n}} [\![n \text{ es par}]\!]$$