Profesor: José Soto, jsoto@dim.uchile.cl

Clase 1

Parte administrativa del curso.

Profesores:
José Soto (Parte I: Combinatoria enumerativa).
Martín Matamala (Parte II: Estructuras Finitas).

Auxiliar: Arturo Merino.

3 Controles + Examen: ¿Semanas 4, 8, 12?

Bibliografía

1. Van Lint-Wilson, **A course in combinatorics**.
2. Bóna, **A walk Through Combinatorics**.
3. Bóna, **Intro. to Enumerative Combinatorics**.
4. Stanley, **Enumerative Combinatorics Vol I.**

Combinatoria Estudio de estructuras finitas o discretas.

- Decidir existencia.
- **Conteo**.
- Encontrar estructuras óptimas.
- Problemas extremos

Capítulo I: Conteo Elemental.

1. Motivación: Problemas de selección y conteo.

¿Cuántos pares podemos seleccionar usando elementos de $A = \{a, b, c\}$? Esta pregunta es ambigua: Hay dos parámetros importantes a considerar para clasificar selecciones de elementos de un conjunto dado A.
(1) Si se permiten repetir elementos.
(2) Si el orden importa.
Cuando el orden importa, hablamos de **secuencias** o *palabras* sobre A. Cuando el orden no importa hablamos de **combinaciones** sobre A y usaremos notación de conjuntos (si no se permite repetir) o de multiconjuntos. En particular, cuando deseemos considerar elementos repetidos, es útil poner los elementos en un paréntesis cuadrado (ej: $[a, a, b] = [a, b, a]$). La siguiente tabla nos ayudará a introducir notación.

Selecciones de k objetos.	Sin repetición	Con repetición
Importa el orden (Listas)	k-variaciones. $A^{\underline{k}}$.	k-secuencias. A^k.
No importa el orden (Combinaciones)	k-conjuntos. $\binom{A}{k}$.	k-multiconjuntos. $\left(\binom{A}{k}\right)$.

Nota: En varios textos, $A^{\underline{k}}$ se denota por $(A)_k$. Usamos la primera notación para evitar confusión con el uso de subindices.

Ejemplo 1. Para $A = \{a, b, c\}$, listamos las continuación las k-variaciones, k-conjuntos y k-multiconjuntos de A, para $k \in \{2, 3, 4\}$.

$$A^{\underline{2}} = \{ab, ac, ba, bc, ca, cb\}, \qquad A^{\underline{3}} = \{abc, acb, bac, bca, cab, cba\}, \qquad A^{\underline{4}} = \emptyset.$$
$$\binom{A}{2} = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}, \qquad \binom{A}{3} = \{\{a, b, c\}\}, \qquad \binom{A}{4} = \emptyset.$$

$$\left(\!\!\binom{A}{2}\!\!\right) = \{[a, a], [a, b], [a, c], [b, a], [b, b], [b, c], [c, a], [c, b], [c, c]\}.$$
$$\left(\!\!\binom{A}{3}\!\!\right) = \{[a, a, a], [a, a, b], [a, a, c], [a, b, b], [a, b, c], [a, c, c], [b, b, b], [b, b, c], [b, c, c], [c, c, c]\}.$$
$$\left(\!\!\binom{A}{4}\!\!\right) = \{[a, a, a, a], [a, a, a, b], [a, a, a, c], \ldots\}.$$

Observación 1. Caso especial: $k = 0$.
Para todo A, $A^0 = A^{\underline{0}} = \binom{A}{0} = \left(\!\binom{A}{0}\!\right) = \{\varepsilon\}$ donde ε representa la lista/combinación vacía.

Observación 2. Caso especial: $A = \emptyset$.
Para todo $k \geq 1$, $\emptyset^k = (\emptyset)_k = \binom{\emptyset}{k} = \left(\!\binom{\emptyset}{k}\!\right) = \emptyset$.

Estudiaremos la cardinalidad de los conjuntos anteriormente definidos. Antes de abordar este problema, comencemos introduciendo notación y principios básicos de conteo.

2. Notación

Definición 1 (Conjuntos típicos)**.**

$$\mathcal{P}(X) = \{A \colon A \subseteq X\}, \text{conjunto potencia.}$$
$$[n] = \{j \in \mathbb{N} \colon 1 \leq j \leq n\} = \{1, 2, \ldots, n\}.$$
$$\mathbb{Z}_n = \{j \in \mathbb{N} \colon j < n\} = \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Notamos que $\mathbb{Z}_0 = [0] = \emptyset$.

Definición 2 (Corchete de Iverson)**.** La expresión $[\![P]\!]$ vale 1 si P es una proposición verdadera, y 0 en otro caso.

Notación versátil. La función $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} (x+1) & \text{si } x \text{ es par,} \\ x & \text{si } x \text{ es impar,} \end{cases}$$

se puede escribir simplemente como $f(x) = x + [\![x \text{ es par}]\!]$. La primera forma de definir f es mejor en claridad, mientras que la segunda es más compacta. Otro ejemplo de su utilidad es que permite manipular sumas múltiples con facilidad:

$$\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{i} j = \sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} j[\![j \leq i]\!][\![i \leq N]\!] = \sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} j[\![j \leq i \leq N]\!]$$
$$= \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{i\in\mathbb{N}} j[\![j \leq N]\!][\![j \leq i \leq N]\!] = \sum_{j=0}^{N} j \sum_{i=j}^{N} 1.$$

Otro concepto que usaremos frecuentemente es el de palabra o secuencia.

Definición 3. Sea A un conjunto finito o infinito. Una *secuencia* o *palabra* sobre A, de largo $k \in \mathbb{N}$, es una función $w\colon [k] \to A$. Usamos la notación w_i en vez de $w(i)$ para la evaluación de w en i, y decimos que w_i es el i-ésimo símbolo de w. Formalmente no hay diferencia entre secuencias y palabras, más allá de la notación: Para escribir w como secuencia se usa $w = (w_1, w_2, \ldots, w_k) = (w_i)_{i=1}^{k}$. Para escribir w como palabra, se escriben sus símbolos sin separadores entre ellos: $w = w_1 w_2 \ldots w_k$.
Denotamos $A^k = \{w_1 w_2 \ldots w_k \colon w_i \in A\}$ al conjunto de las palabras (secuencias) sobre A de largo k. En este curso denotaremos a la palabra vacía, es decir, al único elemento de A^0 por $\emptyset$ ó ε indistintamente.

Por ejemplo, si $A = \{a, b, c, d\}$, se tiene que $aba \in A^3$, $cada \in A^4$, etc. Además, es importante aclarar qué pasa para $A = \emptyset$. En dicho caso,

$$\emptyset^k = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } k \geq 1. \\ \{\varepsilon\}, & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

Definición 4. El conjunto de todas las palabras sobre un alfabeto A se denota por A^*. Es decir

$$A^* = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A^k.$$

Si $w \in A^*$, denotamos al largo de w como $|w|$.

Usando el concepto de palabra podemos recordar el concepto de *producto indexado* de conjuntos. Sean $A_1, \ldots, A_k$ una secuencia de conjuntos y $B = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ su unión, entonces se define el producto de la secuencia de conjuntos como todas las palabras sobre B, de largo k, tal que su i-ésimo símbolo está en A_i. Es decir,

$$\prod_{i=1}^{k} A_i = \{w \in B^k \colon w_i \in A_i, \forall i \in [k]\}.$$

Siempre será importante detenernos a entender *para que valores de k* tiene sentido la definición anterior. Ciertamente tiene sentido para $k \geq 1$. El caso $k = 0$ resulta interesante:

$$\prod_{i=1}^{0} A_i = \{w \in B^0 \colon w_i \in A_i, \forall i \in [0]\} = \{\varepsilon\}.$$

En otras palabras el producto vacío resulta tener un elemento: la palabra vacía[1].

Observación 3. En particular, si todos los A_i son iguales a un conjunto A dado, entonces se obtiene que para todo $k \in \mathbb{N}$, $\prod_{i=1}^{k} A = A^k$.

Observación 4. Si bien el producto indexado es distinto al producto cartesiano iterado, existe una biyección natural entre ambos: basta remover los paréntesis y comas.

$$\begin{aligned} (\cdots(A_1 \times A_2) \times \cdots) \times A_k &\to \prod_{i=1}^{k} A_i \\ ((\cdots(a_1, a_2), \ldots), a_k) &\mapsto a_1 a_2 \ldots a_k \end{aligned}$$

Bajo esta identificación no hacemos diferencia, por ejemplo, entre $A_1 \times A_2$ y $\prod_{i=1}^{2} A_i$.

3. Cardinales finitos y principio biyectivo.

¿Qué es contar un conjunto? Marcar cada elemento iterativamente por un número: *uno, dos, tres,. . . .*
Encontrar una correspondencia entre los objetos a contar y un conjunto básico de referencia (el conjunto $[n]$). Este proceso se puede hacer sin necesidad de usar los naturales como referencia (Ejemplo: Un niño pequeño habitualmente levantará *tantos dedos* como elementos vistos). Así, vemos que la definición más básica para contar no es la de "declarar una cardinalidad" sino más bien la de "poner en correspondencia dos conjuntos".

[1] No confundir esto con el producto no vacío de conjuntos vacíos, ya que éste último si es vacío.

Definición 5. Equipotencia.

Dos conjuntos A y B se dicen *equipotentes* o *equinumerosos* si existe $f\colon A \to B$ función biyectiva. Anotamos en este caso $|A| = |B|$. Decimos informalmente que A y B tienen el mismo número de elementos.

Otra forma de interpretar la definición de equipotencia es la siguiente

Definición 6. Principio Biyectivo. Probar que dos conjuntos tienen el mismo número de elemento equivale a encontrar una biyección entre ambos.

Para declarar cuantos elementos tiene un conjunto. Para esto usamos la siguiente definición.

Definición 7. Cardinales finitos.

Sea A es un conjunto y $n \in \mathbb{N}$. Decimos que $|A| = n$ si $|A| = |\,[n]\,|$. En este caso decimos que *la cardinalidad de A es n* o que *el cardinal* de A es n.
Decimos que el conjunto A es *finito* si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|A| = n$. De otro modo decimos que A es infinito.

Para que la expresión $|A| = n$ esté bien definida, se hace necesario probar que n es el único número natural para el cual $|A| = |\,[n]\,|$. Esto queda propuesto como ejercicio.

Observación 5. Cuando decimos que A tiene n elementos, lo que en verdad estamos haciendo es afirmar que existe una biyección entre A y $[n]$. En varias ocasiones es útil *numerar* los elementos de A, es decir escribir $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Esto no es otra cosa que enunciar la existencia de una biyección $[n] \to A$ dada por $i \mapsto a_i$.

Ejemplo 2. Pruebe que $|\mathbb{Z}_n| = n$.

Solución. En efecto, la función $\mathbb{Z}_n \to [n]$ dada por $i \mapsto i + 1$ es biyectiva (su inversa es $j \mapsto j - 1$). □

Observación 6. En este curso solo probaremos que una función es biyección cuando no sea *evidente*

Ejemplo 3. En un campeonato de fútbol juegan n equipos en una modalidad de eliminación: cada vez que un equipo pierde un partido, sale del campeonato. Además, cada partido debe tener un ganador y un perdedor (no hay empates). ¿Cuál el número mínimo y máximo de partidos que se deben jugar para que quede un solo equipo no eliminado?

Solución. Biyección entre conjunto de partidos jugados y el conjunto de equipos eliminados (hay un perdedor por cada partido que es eliminado, y estos no se pueden repetir). Por lo tanto si deseamos que hayan $n - 1$ eliminados, deberán jugarse $n - 1$ partidos. □

4. Principios de la suma y el producto.

Definición 8. Principio de la suma. Sean A y B conjuntos finitos *disjuntos* entonces

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

(Informal) Si una actividad se puede realizar de a maneras y una segunda actividad se puede realizar de b maneras, y ambas actividades no se pueden hacer a la vez, entonces existe un total de $a + b$ maneras de realizar alguna de las dos actividades.

Definición 9. Principio del producto. Sean A y B conjuntos finitos.

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

(Informal) Si hay a formas de hacer una actividad y b maneras de hacer una segunda actividad entonces existen $a \cdot b$ formas de realizar ambas actividades.

Demostración del principio de la suma.
Sean $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ y $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ conjuntos finitos disjuntos. Use la biyección $f\colon [n + m] \to A \cup B$ dada por

$$f(i) = \begin{cases} a_i & \text{si } i \in [n], \\ b_{i-n} & \text{si } n + 1 \le i \le n + m \end{cases} \qquad \square$$

Demostración del principio del producto.
Sean $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ y $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ conjuntos finitos. Usar la biyección $f\colon A \times B \to [n \cdot m]$ dada por $f(a_i, b_j) = (i-1)m + j$ $\square$.

Ejemplo 4.

1. Una estudiante debe elegir un ramo electivo para llenar su curriculum. El departamento de matemáticas ofrece 12 ramos electivos que ella puede tomar y el departamento de física ofrece 9. Como los cursos son distintos, el principio de la suma nos dice que ella tiene $12 + 9 = 21$ opciones.

2. Un menú simple en el casino consiste de un plato de entrada y un plato de fondo. El casino ofrece cada dia 3 opciones de platos de entrada y 2 de platos de fondo. Luego el número de menús simples distintos es $3 \cdot 2 = 6$.

Los principios de la suma y del producto se generalizan inmediatamente usando inducción a múltiples conjuntos.

Proposición 5 (Principio de la Suma)**.** *Si $\{A_1, \ldots, A_k\}$ es una partición finita de un conjunto finito A entonces $|A| = \sum_{i=1}^{k} |A_i|$.*

Proposición 6 (Principio del Producto)**.** *Si $A_1, \ldots, A_k$ es una secuencia finita de conjuntos finitos entonces $|\prod_{i=1}^{k} A_i| = \prod_{i=1}^{k} |A_i|$. En particular, si A es finito y $k \in \mathbb{N}$, entonces $\left|A^k\right| = \prod_{i=1}^{k} |A| = |A|^k$.*

Ejemplo 7.

1. ¿Cuántos números naturales entre 1 y 1000 comienzan por la cifra 6?
   Solución: Separemos estos números por cantidad de cifras. De una cifra, hay 1 número que comienza por 6 (el 6). De dos cifras, tenemos los 10 números entre 60 y 69. De tres cifras tenemos los 100 números entre 600 y 699. Luego en total hay $1 + 10 + 100 = 111$ números que satisfacen lo pedido.

2. ¿Cuántos números naturales de a lo más 5 cifras se escriben sin usar la cifra 5?
   Solución: Hay al menos dos formas de contar este conjunto. Una de ellas involucra contar mediante el principio de producto la cantidad de números de i cifras que se escriben sin el 5, y luego sumar las cardinalidades sobre todo i. Esta manera si bien es válida, es algo larga y merece cuidado: Se debe recordar que los números de i cifras (con $i \geq 2$) no pueden empezar con la cifra 0.

   Una solución alternativa es hacer una biyección entre el conjunto contado y las secuencias $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ donde cada a_i puede ser uno de los 9 elementos de $\mathbb{Z}_{10} \setminus \{5\}$. La biyección consiste en completar cada número con 0's a la izquierda. El principio del producto nos garantiza entonces que hay 9^5 números.

3. ¿Cuántas palabras de A^* tienen a lo más k símbolos?
   Solución: Estamos buscando $\left|\bigcup_{i\in 0}^{k} A^i\right| = \sum_{i=0}^{k} |A|^i$. La cantidad anterior depende del cardinal de A y se simplifica usando suma geométrica a ser:
   $$[\![|A| \neq 1]\!]\frac{|A|^{k+1} - 1}{|A| - 1} + [\![|A| = 1]\!](k+1).$$

4. ¿Cuántas números naturales de a lo más k cifras se escriben sin usar la cifra 0?
   Solución: El conjunto que deseamos contar está en biyección con las palabras en $[9]^*$ que tienen entre 1 y k símbolos. Usando el ejercicio anterior, éstas son exactamente
   $$\frac{9^{k+1} - 1}{9 - 1} - |[9]|^0 = \frac{9^{k+1} - 9}{8}.$$

5. Una palabra es palíndroma si al leerse de derecha a izquierda se obtiene la misma palabra. ¿Cuántas palabras palíndromas hay en A^k?
   Solución: La solución depende de si k es par o impar.
   Si k es par, entonces toda palabra palíndroma en A^k se escribe como ww^R, con $w \in A^{k/2}$, donde w^R es la palabra w escrita de derecha a izquierda.
   Si k es impar, entonces toda palabra palíndroma en A^k se escribe como wxw^R, con $w \in A^{(k-1)/2}$, $x \in A$.
   Luego la cantidad pedida es:
   $$[\![k \text{ par}]\!] \cdot |A^{k/2}| + [\![k \text{ impar}]\!] \cdot |A^{(k-1)/2}| \cdot |A| \;=\; A^{\lceil k/2 \rceil}.$$

5. Ejemplo Importante: Fibonacci y Secuencias de Conteo

Considere un tablero de $1 \times (n-1)$ casilleros. (El $n-1$ es para coincidir con la definición moderna) ¿De cuántas maneras podemos cubrirlo exactamente usando solo monominós y dominós?
Llamemos F_n a la respuesta. ¿Cuánto vale esta cantidad?
Es fácil calcular los primeros términos. $F_0 = 0$ (no hay tableros de -1 casilleros), $F_1 = 1$ (hay una sola forma de cubrir el tablero vacío: no usar piezas). $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3\ldots$ y en general la secuencia resulta ser:

$$f = (0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots)$$

¿Hay algún patrón que nos permita entender mejor esta *secuencia de conteo?*
Podemos obtener el valor de f_n a partir de los anteriores notando que para $n \geq 3$ hay dos formas de poner la primera ficha: si usamos un monominó, hay exactamente f_{n-1} maneras de cubrir el resto, y su usamos un dominó hay f_{n-2} maneras de cubrir el resto. El principio de la suma nos dice entonces que

$$\forall n \geq 3, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

de hecho, la recurrencia también vale para $n = 2$, así que F satisface:

$$\forall n \geq 2, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, f_0 = 0, f_1 = 1$$

La secuencia anterior se conoce como secuencia de Fibonacci (podemos tomar el problema original como su definición combinatorial: f_n es el cardinal del conjunto de maneras de cubrir un tablero de 1 por $n-1$ casilleros con mononimós y dominós)
En el curso nos encontraremos con muchas secuencias de conteo (secuencias cuyo n-ésimo término cuenta el cardinal de algún conjunto), por ejemplo, la secuencia

$$a = (1, 2, 4, 8, \dots)$$

tal que $a_n = 2^n$, es la secuencia tal que a_n cuenta el cardinal de $\{0, 1\}^n$.
Una herramienta util para encontrar propiedades de secuencias conocidas de conteo es la página web `https://oeis.org` de la enciclopedia online de sucesiones enteras (the online encyclopedia of integer sequences).

6. Variaciones y permutaciones de un conjunto. Principio general del producto.

Sea A un conjunto finito.

Definición 10. Una palabra sobre A que no contiene símbolos repetidos se denota *variación*, y si tiene largo $k \in \mathbb{N}$ la llamamos k-variación.
Denotamos por $A^{\underline{k}}$ al conjunto de las k-variaciones de A. Además, denotamos $n^{\underline{k}}$ al cardinal de $[n]^{\underline{k}}$. A esta cantidad la llamamos factorial decreciente de n sobre k.

Nota: En varios textos, $A^{\underline{k}}$ se denota por $(A)_k$. Usamos la primera notación para evitar confusión con el uso de subíndices.

Definición 11. Una variación de A que contiene a todos los símbolos de A se denota *permutación* u *ordenamiento* de A. Denotamos por $A!$ al conjunto de permutaciones de A y denotamos por $n!$ al cardinal de $[n]!$. A esta cantidad la llamamos factorial de n.

Nota: La notación $A!$ no es estándar, usar con cuidado.

Las variaciones y permutaciones de conjuntos aparecen naturalmente en problemas combinatoriales por lo cual es bueno estudiar su cardinal. Notamos que si A es un conjunto con n elementos, entonces directamente $\left|A^{\underline{k}}\right| = n^{\underline{k}}$ por lo que solo basta entender estos valores.
Antes de escribir la fórmula general, veamos que sucede si k es 0. Como la única 0-variación de cualquier conjunto es la palabra vacía, se tiene

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon n^{\underline{0}} = |[n]^{\underline{0}}| = \{\emptyset\} = 1.$$

En particular $0! = 0^{\underline{0}} = 1$. Por otro lado notamos que

$$\forall k \geq n+1, n^{\underline{k}} = |[n]^{\underline{k}}| = 0,$$

ya que no hay k símbolos distintos en $[n]$.
La próxima proposición da una fórmula general para los factoriales.

Proposición 8.

$$\forall n, k \in \mathbb{N}: \ n^{\underline{k}} = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \prod_{i=n-k+1}^{n} i.$$

En particular,

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ n! = n^{\underline{n}} = n \cdot (n-1) \cdots 1 = \prod_{i=1}^{n} i.$$

y luego,

$$\forall n, k \in \mathbb{N}: \ n^{\underline{k}} = [\![k \leq n]\!] \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Demostración. El caso $k \geq n+1$ ya fue estudiado antes, así que enfoquémonos en el caso $k \leq n$. Considere la biyección

$$[n] \times [n-1] \times \cdots \times [n-k+1] \to [n]^{\underline{k}},$$

donde la secuencia $c_1 c_2 c_3 \ldots c_{n-k+1}$ es llevada a la k-variación cuyo i-ésimo símbolo es el c_i-ésimo elemento de $[n]$ que no haya sido usado aún. La segunda parte de la proposición es directa de la anterior. Y la tercera se obtiene pues $[n]^{\underline{k}} = \emptyset$ para $k \geq n+1$, y de combinar las dos expresiones anteriores para el caso $k \leq n$. $\square$

En la demostración anterior parece algo forzada la biyección antes de usar el principio del producto. Para calcular $|[n]^{\underline{k}}|$ basta notar que toda k-variación se puede describir decidiendo iterativamente cada símbolo. El primer símbolo se puede elegir de n maneras, el segundo de $n-1$, y así sucesivamente. Estamos tentados a usar el principio del producto pero no podemos hacerlo directamente tal como está planteado. Para estos casos planteamos la siguiente forma general del principio del producto.

Proposición 9 (Principio General del Producto)**.**
(Informal) Si debemos realizar una secuencia de k elecciones, donde

- *La primera elección tiene s_1 posibilidades.*
- *Para cada forma fija de realizar las primeras $i-1$ elecciones, la i-ésima tiene s_i posibilidades.*

Entonces la secuencia de elecciones se puede realizar de $s_1 \cdot s_2 \cdots s_k$ maneras.

(Formal) Sea $k \in \mathbb{N}$ y A un conjunto finito. Sea además $B \subseteq A^k$. Decimos que una palabra $w \in A^i$ es un prefijo de B si existe $w' \in A^{k-i}$ tal que $ww' \in B$. Si el conjunto B satisface que

- *B tiene s_1 prefijos de largo 1.*

- *Para cada prefijo w de largo $i-1$ de B, existen exactamente s_i símbolos a en A tal que wa es un prefijo de largo i de B.*

Entonces $|B| = \prod_{i=1}^{k} s_i$.

El principio general del producto es una consecuencia del principio (normal) del producto que queda propuesta como ejercicio.
Tenemos lista la primera fila de nuestra tabla de selecciones de elementos de un conjunto.

7. Demostraciones Combinatoriales

Una aplicación importante de los principios anteriores es que nos permiten en varios casos demostrar identidades usando argumentos combinatoriales.
Para probar una identidad del tipo $r = s$, donde r y s son expresiones aritméticas que se evalúan a números naturales, podemos encontrar conjuntos R y S, con $|R| = r$ y $|S| = s$ y luego encontrar una biyección entre R y S. A este tipo de demostraciones se le conoce como **demostración combinatorial.**
En esta sección damos un par de ejemplos muy básicos. El poder de este tipo de demostraciones se verá más adelante.

Ejemplo 10. Probar combinatorialmente que para todo número $n \in \mathbb{N}^+$,

$$n^2 = (n+1)(n-1) + 1.$$

Solución: Propuesta

De hecho, la fórmula para la suma geométrica se puede probar combinatorialmente.

Ejemplo 11. Pruebe combinatorialmente que para todo n, m números naturales con $m \geq 2$, se tiene

$$\sum_{i=0}^{n} m^i = \frac{m^{n+1} - 1}{m - 1}.$$

Solución: Propuesta

Un ejemplo importante de demostración combinatorial consiste en probar que el conjunto potencia de $[n]$ tiene exactamente 2^n elementos.

Ejemplo 12. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$|\mathcal{P}(n)| = 2^n.$$

Solución: Considere la biyección $\varphi\colon \mathcal{P}(n) \to \{0,1\}^n$ dada por

$$\varphi(X)_i = [\![i \in X]\!].$$

Con esto, $|\mathcal{P}(n)| = |\{0,1\}^n| = 2^n$. $\blacksquare$

Clase 2

Antes de continuar con selecciones. Enunciemos dos extensiones naturales del principio biyectivo.

1. Principio Inyectivo y Principio Sobreyectivo

Proposición 13 (Principio Inyectivo)**.** *Sean A y B conjuntos donde B es finito.*

A es finito y $|A| \leq |B|$ si y solo si existe una función inyectiva de A a B.

Demostración. La dirección hacia la derecha es simple. Sean $f\colon A \to [m]$ y $g\colon [n] \to B$ biyecciones, donde $m \leq n$. Como ambas funciones son inyectivas, la función $h\colon A \to B$ dada por $h(x) = g(f(x))$ es inyectiva.
Veamos la otra dirección. Sea $h\colon A \to B$ una función inyectiva y sea $g\colon B \to [n]$ una biyección. Luego la función $f = g \circ h\colon A \to [n]$ es inyectiva. Usando que $f(A) \subseteq [n]$ y que todo subconjunto de un conjunto finito es finito (ejercicio) tenemos que $f(A)$ es finito. Como f es biyección entre A y $f(A)$, también lo es A. Finalmente tenemos que $|A| = |f(A)| \leq n = |B|$. □

Comentario 14. El principio inyectivo puede ser modificada a una *definición* de orden para cardinales generales: $|A| \leq |B|$ se define como la existencia de una función inyectiva de A en B.

Otra forma de interpretar el principio anterior es el siguiente.

> (**Principio Inyectivo**) Para probar que un conjunto tiene una cantidad menor o igual de elementos que otro, basta encontrar una inyección (i.e., una función inyectiva) del primer conjunto al segundo.
>
> En particular, si se encuentra una inyección de A en B, y una inyección de B en A, entonces A y B tienen el mismo cardinal.

Comentario 15. La última afirmación también es cierta para conjuntos infinitos, y se conoce como el Teorema de Cantor-Schröder–Bernstein (si nunca lo ha hecho, puede intentar demostrarlo).

Una variante del principio anterior es la siguiente

Proposición 16 (Principio Sobreyectivo)**.** *Sean A y B conjuntos donde B es finito.*

A es finito y $|A| \leq |B|$ si y solo si existe una función sobreyectiva de B a A.

Demostración. La dirección hacia la derecha es similar a la de la proposición anterior. Sean $f\colon [n] \to A$ y $g\colon B \to [m]$ biyecciones, donde $n \leq m$. Definamos además la función $f'\colon [m] \to A$ como $f'(x) = f(\min(x, n))$. Como f es sobreyectiva, f' también lo es. Como la composición de funciones sobreyectivas es sobreyectiva, concluimos que $f' \circ g\colon B \to A$ es sobreyectiva.
Para la otra dirección sea $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ y $f\colon B \to A$ una función sobreyectiva. La función $h\colon A \to B$ dada por $h(a) = b_i$ donde i es el mínimo índice tal que $f(b_i) = a$ está bien definida (siempre existe este índice pues $f^{-1}(a)$ es no vacío y $\mathbb{N}$ es bien ordenado) y es inyectiva. Por la proposición anterior A es finito y $|A| \leq |B|$. □

Comentario 17. El principio sobreyectivo también funciona para conjuntos infinitos, pero su demostración requiere el uso del axioma de elección (interesantemente, es equivalente al axioma de elección).

Podemos rescribir el principio sobreyectivo de una manera más coloquial como sigue.

> (**Principio Sobreyectivo**) Para probar que un conjunto tiene una cantidad menor o igual de elementos que un segundo conjunto, basta encontrar una sobreyección (i.e., una función sobreyectiva) del segundo conjunto al primero.
>
> En particular, si se encuentra una sobreyección de A en B, y una sobreyección de B en A, entonces A y B tienen el mismo cardinal.

Los principios anteriores nos permiten dar distintas maneras de probar que dos conjuntos tienen el mismo cardinal.

Corolario 18. *Sean A y B dos conjuntos finitos. Los siguientes son equivalentes.*

1. $|A| = |B|$.
2. *Existe una inyección de A en B y una inyección de B en A.*
3. *Existe una sobreyección de A en B y una sobreyección de B en A.*
4. *Existe una inyección de A en B y una sobreyección de A en B.*

Demostración. Directo. □

Con estos principios podemos dar demostraciones combinatoriales para desigualdades como la siguiente.

Ejemplo 19. Pruebe combinatorialmente que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \leq 2^n$.
Solución: El lado derecho cuenta naturalmente el conjunto $\mathbb{Z}_2^n = \{0,1\}^n$. Tomemos $X = \{0^{i-1}10^{n-i-1} \in \mathbb{Z}_2^n : i \in [n]\}$ como el conjunto de palabras de $\mathbb{Z}_2^n$ con exactamente un símbolo 1. Claramente, $|X| = n$ y como X se inyecta en $\mathbb{Z}_2^n$ por inclusión, se tiene la desigualdad.

2. Funciones, inyecciones y biyecciones

Con la maquinaria que tenemos hasta el momento es sencillo contar ciertas clases de funciones.
Primero, observamos que A^k no es más que una notación agradable para denotar al conjunto de funciones de $[k]$ en A. Esta notación es muy flexible y se puede extender un poco.

Definición 12. El conjunto de funciones de A en B se denota como B^A. También definimos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Iny}(A,B) &= \{f \in B^A \mid f \text{ inyectiva}\},\\
\mathrm{Sob}(A,B) &= \{f \in B^A \mid f \text{ sobreyectiva}\},\\
\mathrm{Biy}(A,B) &= \{f \in B^A \mid f \text{ biyectiva}\}.
\end{aligned}$$

Contar funciones generales y funciones inyectivas es directo.

Proposición 20. *Para A y B finitos,*

$$|B^A| = |B|^{|A|}.$$

Demostración. Sea $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, con $n = |A|$. La función $\varphi\colon B^A \to B^n$ dada por $\varphi(f)_i = f(a_i)$ es una biyección. □

Proposición 21. *Para A y B finitos,*

$$|\mathrm{Iny}(A,B)| = |B|^{\underline{|A|}}.$$

Demostración. Sea $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, con $n = |A|$. La función $\varphi\colon \mathrm{Iny}(A,B) \to B^{\underline{n}}$ dada por $\varphi(f)_i = f(a_i)$ es una biyección. □

Contar sobreyecciones es un poco más complejo así que lo pospondremos.
Un caso particularmente interesante resulta al contar biyecciones de un conjunto en otro. Notamos que $\mathrm{Biy}(A,B) \neq \emptyset$ si y solo si $|A| = |B|$, y en este caso (suponiendo A finito)

$$\mathrm{Biy}(A,B) = \mathrm{Biy}(A,A) = \mathrm{Iny}(A,A)$$

por lo que

$$|\mathrm{Biy}(A,B)| = [\![|A| = |B|]\!]\,|A|!$$

Otra forma de entender los resultados anteriores es que las funciones se pueden codificar como palabras, las inyecciones como variaciones y las biyecciones como ordenamientos o permutaciones. De hecho, en álgebra, a las funciones biyectivas de un conjunto en si mismo se le denota permutaciones.

Definición 13. Una permutación de A es una función biyectiva de A en si misma. Denotamos al conjunto de permutaciones de A como $\mathcal{S}_A = \{f \in A^A \mid f \text{ biyectiva}\}$. Además, denotamos $\mathcal{S}_n := \mathcal{S}_{[n]}$.

La notación $\mathcal{S}_n$ se suele leer "grupo simétrico de n elementos" y se usa para recordar que este conjunto junto a la composición forma un grupo.

3. Combinaciones: subconjuntos y multiconjuntos

Recordemos la tabla de selecciones con la que comenzamos el curso.

Selecciones de k objetos.	Sin repetición	Con repetición
Importa el orden (Listas)	k-variaciones. $A^{\underline{k}}$.	k-secuencias. A^k.
No importa el orden (Combinaciones)	k-conjuntos. $\binom{A}{k}$.	k-multiconjuntos. $\left(\!\binom{A}{k}\!\right)$.

Definición 14. Para todo $n, k \in \mathbb{N}$, definimos

$$n^k := \left|\, [n]^k \,\right| \qquad \text{(Potencias naturales)}$$

$$n^{\underline{k}} := \left|[n]^{\underline{k}}\right| \qquad \text{(Factorial decreciente)}$$

$$\binom{n}{k} := \left|\binom{[n]}{k}\right| \qquad \text{(Combinatorio de } n \text{ sobre } k\text{, o coeficiente binomial de } n \text{ sobre } k\text{)}$$

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) := \left|\left(\!\binom{[n]}{k}\!\right)\right| \qquad \text{(Multicombinatorio de } n \text{ sobre } k\text{)}$$

$$n! := n^{\underline{n}} \qquad (n \text{ factorial})$$

Observación 7. Si $|A| = n$ entonces $|A^k| = n^k$, $|A^{\underline{k}}| = n^{\underline{k}}$, $\left|\binom{A}{k}\right| = \binom{n}{k}$ y $\left|\left(\!\binom{A}{k}\!\right)\right| = \left(\!\binom{n}{k}\!\right)$. Estas igualdades se prueban usando la biyección entre A y $[n]$.

Puede parecer extraño que hayamos *redefinido* las potencias naturales. Sin embargo al hacerlo de esta manera respondemos de inmediato la siguiente duda natural ¿Cómo definimos 0^0? En general, ¿como definimos los valores anteriores cuando $n = 0$ o $k = 0$?

Observación 8. Usando las definiciones y observaciones anteriores, se concluye que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$n^0 = n^{\underline{0}} = \binom{n}{0} = \left(\!\binom{n}{0}\!\right) = 1.$$

En particular,

$$0^0 = 0^{\underline{0}} = \binom{0}{0} = \left(\!\binom{0}{0}\!\right) = 1,$$

y

$$0! = 0^{\underline{0}} = 1.$$

Por otro lado, para todo $k \geq 1$

$$0^k = 0^{\underline{k}} = \binom{0}{k} = \left(\!\!\binom{0}{k}\!\!\right) = 0.$$

Como es de esperar, la definición de potencias naturales coincide con la habitual. Es decir, $(\forall n, k \in \mathbb{N}) \quad n^k = \prod_{i=1}^{k} n$.
Ya hemos discutido las variaciones y secuencias. Prosigamos con las combinaciones de un conjunto. Al igual que antes notamos que si A tiene n elementos, entonces directamente $\left|\binom{A}{k}\right| = \binom{n}{k}$. La próxima proposición nos da una fórmula para esta cantidad.

Proposición 22.

$$\forall n, k \in \mathbb{N} : \binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = [\![k \leq n]\!] \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Demostración. Considerar la biyección natural: $\binom{[n]}{k} \times \mathcal{S}_k \to [n]^{\underline{k}}$, donde cada k-variación en $[n]^{\underline{k}}$ se obtiene eligiendo primero un subconjunto de $[n]$ de tamaño k y luego eligiendo un orden de dicho subconjunto. □

Antes de proseguir con los multiconjuntos, detengámonos a resolver algunos problemas.

Ejercicios resueltos 23. De una demostración combinatorial de las siguientes identidades-

1. $\forall 0 \leq k \leq n : \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. $\forall k, n \in \mathbb{N} : \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$.
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Demostración.

1. Usar la biyección $\binom{[n]}{k} \to \binom{[n]}{n-k}$ dada por $X \mapsto [n] \setminus X$ (complemento).
2. Basta notar que $\displaystyle\binom{[n+1]}{k+1} = \underbrace{\binom{[n]}{k+1}}_{\text{Conjuntos sin } n+1} \cup \left\{\{n+1\} \cup Y : Y \in \binom{[n]}{k}\right\}$ y que la unión es disjunta.
3. Directo de $\mathcal{P}([n]) = \bigcup_{k=0}^{n} \binom{[n]}{k}$, y del hecho que $2^n = |\mathcal{P}([n])|$. □

Uno de los ejercicios anteriores nos permite dar una definición alternativa de los coeficientes binomiales en función de una recurrencia. Esto aparecerá con cierta frecuencia en el curso.

Proposición 24. *Los números* $\left(\binom{n}{k}\right)_{n,k\geq 0}$ *están definidos por la siguiente recurrencia:*

$$\forall k, n \geq 1 : \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

con valores de borde, $\binom{n}{0} = 1$*, para* $n \geq 0$ *y* $\binom{0}{k} = 0$*, para* $k \geq 1$.

Tratemos ahora los multiconjuntos. Un multiconjunto de A es una selección de objetos de A donde cada elemento puede aparecer más de una vez y el orden no importa. Así $[a, b, a]$ es un multiconjunto donde a aparece 2 veces y b aparece 1 vez. Para poder tratar con ellos necesitamos una definición formal.

Definición 15. Un multiconjunto x de A es una función $x \colon A \to \mathbb{N}$, donde $x(a)$ representa el número de veces que se selecciona $a \in A$. La cantidad $\sum_{a \in Dom(x)} x(a)$ se denomina *tamaño* de x.

Recordemos que $\left(\!\binom{A}{k}\!\right)$ es la familia de multiconjuntos de A de tamaño k, y que si $A = [n]$, $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ representa su cardinalidad. En particular, es directo notar que $\left(\!\binom{0}{0}\!\right) = 1$, $\left(\!\binom{n}{0}\!\right) = \left(\!\binom{0}{k}\!\right) = 0$ si $n, k > 0$. Ahora estamos listos para encontrar el valor de $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$.

Proposición 25.

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Demostración. Considere la biyección que a un multiconjunto x de $[n]$ de tamaño k le asocia la palabra $x' \in \{\bullet, |\}^{n+k-1}$ dada por

$$x' = \underbrace{\bullet \ldots \bullet}_{x(1)} \mid \underbrace{\bullet \ldots \bullet}_{x(2)} \mid \cdots \mid \underbrace{\bullet \ldots \bullet}_{x(n-1)} \mid \underbrace{\bullet \ldots \bullet}_{x(n)}.$$

La asignación $x \mapsto x'$ es una biyección entre los multiconjuntos de $[n]$ de tamaño k, $\left(\!\binom{[n]}{k}\!\right)$ y las palabras en $\{\bullet, |\}^{n+k-1}$ con exactamente k símbolos $\bullet$ y $n-1$ separadores $|$. El último conjunto, a su vez, está en biyección con $\binom{[n+k-1]}{k}$, ya que cada palabra x' está definida exactamente por el conjunto de índices i en $[n+k-1]$ tales que $x'_i = \bullet$. $\square$

Al igual que antes, podemos dar una definición alternativa de los números $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ via una recurrencia.

Proposición 26. *Los números* $\left(\left(\!\binom{n}{k}\!\right)\right)_{n,k\geq 0}$ *están definidos por la siguiente recurrencia:*

$$\forall k, n \geq 1 : \left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{n}{k-1}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n-1}{k}\!\!\right).$$

con valores de borde, $\left(\!\binom{n}{0}\!\right) = 1$, *para* $n \geq 0$ *y* $\left(\!\binom{0}{k}\!\right) = 0$, *para* $k \geq 1$.

Demostración. Propuesta. $\square$

Gracias a las proposiciones anteriores podemos completar el siguiente cuadro con las cardinalidades de las selecciones de k objetos de un conjunto A de n elementos.

Selecciones de k objetos.	Sin repetición	Con repetición
Importa el orden (Listas)	k-variaciones. $\lvert A^{\underline{k}}\rvert = n^{\underline{k}} = \prod_{i=n-k+1}^{n} i.$	k-secuencias. $\lvert A^k\rvert = n^k.$
No importa el orden (Combinaciones)	k-conjuntos. $\left\lvert\binom{A}{k}\right\rvert = \binom{n}{k}.$	k-multiconjuntos. $\left\lvert\left(\!\binom{A}{k}\!\right)\right\rvert = \left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{n+k-1}{k}.$

4. Composiciones de un entero.

Definición 16. Una **composición** de n en k partes es una solución a la ecuación $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ con $x_i \in \mathbb{N}^+$.
Una **composición débil** de n en k partes es una solución a la ecuación $x_1 + \cdots + x_k = n$ con $x_i \in \mathbb{N}$.
Al conjunto de los $x\colon [k] \to [n]$ composiciones de n en k partes lo denotamos por $\mathrm{COM}(n, k)$.
Al conjunto de los $x\colon [k] \to [n] \cup \{0\}$ composiciones débiles de n en k partes lo denotamos por $\mathrm{WCOM}(n, k)$.
Además, denotamos $\mathrm{com}(n, k) = |\,\mathrm{COM}(n, k)|$ y $\mathrm{wcom}(n, k) = |\,\mathrm{WCOM}(n, k)|$.

Notemos que $\mathrm{WCOM}(n, k) = \left(\!\binom{[k]}{n}\!\right)$. Gracias a esto prodemos probar el siguiente resultado.

Proposición 27. *Para todo* $n, k \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{wcom}(n, k) = \binom{n+k-1}{n}.$$

$$\mathrm{com}(n, k) = \mathrm{wcom}(n-k, k) = [\![k \leq n]\!]\binom{n-1}{n-k}.$$

Demostración. La primera igualdad viene del hecho que cada multiconjunto de $[k]$ largo n se puede ver como una composición débil de n en k partes. La segunda igualdad sale de que al restar uno de cada parte de una composición de $n+k$ se obtiene una composición débil de n. □

Observación 9. No es bueno tentarse a usar la identidad $\binom{n-1}{n-k} = \binom{n-1}{k-1}$ y escribir que $\operatorname{com}(n,k) = [\![k \leq n]\!]\binom{n-1}{k-1}$ pues la expresión de la izquierda tiene sentido para todo $k \geq 0$ pero la expresión de la derecha no está definida cuando $k = 0$. Por otro lado la expresión $[\![k \leq n]\!]\binom{n-1}{n-k}$ tiene sentido incluso para $k = 0$ (más adelante le daremos un sentido al caso $n = k = 0$ donde tendremos $\binom{-1}{0} = 1$).

Proposición 28. *Para $k, n \in \mathbb{N}$,*

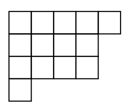
$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname{com}(n,k) = [\![n \geq 1]\!]2^{n-1} + [\![n = 0]\!].$$

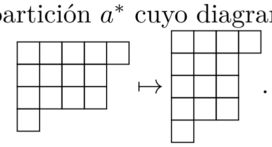
Demostración. Propuesta. □

5. Particiones de un entero

Definición 17. Una **partición**[1] de $n \in \mathbb{N}$ es un vector $a = (a_1, \dots, a_k)$ con $\sum_{i=1}^{k} a_i = n$, $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k \geq 1$. Si a es una partición de n, escribimos $a \vdash n$. Denotamos por $p_k(n)$ al número de particiones de n en **exactamente**[2], y al total lo denotamos $p(n)$.

Definición 18. El **Diagrama de Ferrers** (también conocido como **Diagrama de Young**) de una partición $a = (a_1, \dots, a_k)$ de n es un arreglo de cajas cuadradas ordenadas en k filas horizontales (alineadas a la izquierda) de tamaños $a_1, \dots, a_k$ respectivamente ordenadas verticalmente.

Por ejemplo, el diagrama de Ferrers de $(5, 4, 4, 1)$ es  .

Definición 19. La partición **conjugada** de a es la partición a^* cuyo diagrama de Ferrers es el transpuesto del diagrama de a. Por ejemplo, $(5, 4, 4, 1)^* = (4, 3, 3, 3, 1)$.  .

Notemos que $(\cdot)^*$ es una biyección (de hecho una involución) del conjunto de particiones de n.

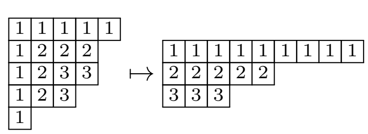
Proposición 29. *El número de particiones de n en k partes es igual al número de particiones de n cuya parte más grande tiene largo k.*

Demostración. Basta notar que $()^*$ es una biyección entre ambos conjuntos. □

Podemos usar Diagramas de Young para probar otras relaciones sorprendentes.

Lema 30. *El número de particiones de n autoconjugadas es igual al número de particiones de n con todas sus partes impares y distintas.*

Demostración. Sea π una partición autoconjugada. Crearemos una nueva partición $f(\pi)$ con todas sus partes impares. Borremos el primer gancho (primera fila y columna) y agreguemos los cuadrados borrados como primera fila de $f(\pi)$. Repitamos el proceso borrando (borrar ganchos y agregar filas). Con esto el objeto creado $f(\pi) = (2\pi_1 - 1, 2\pi_2 - 3, \dots)$ (donde el número de partes es tal que su última entrada no es 0), es una particion con todas sus partes impares y distintas. Claramente el proceso es reversible.

Ejemplo: $(5, 4, 4, 3, 1) \mapsto (9, 5, 3)$ y gráficamente  □

[1]¡Cuidado! El nombre es similar a las particiones de un conjunto pero el sentido es distinto.

[2]Ojo, algunos autores llaman $p_k(n)$ a las particiones en a lo más k partes.

Una manera alternativa de codificar $a \vdash n$ es como un vector de multiplicidades $b \in$ donde b_i es igual al número de veces que i aparece como parte de a. Inmediátamente concluímos las siguientes proposiciones.

Proposición 31. *El número de soluciones enteras x de $\sum_i ix_i = n$, con $x_i \geq 0$ es exactamente $p(n)$.*
El número de soluciones enteras x de $\sum_i ix_i = n$, con $x_i \geq 0$ y $\sum_i x_i = k$ es exactamente $p_k(n)$.

6. Anagramas

En esta sección nos interesa estudiar cuantas palabras se pueden obtener al permutar las letras de una palabra dada.

Definición 20. Sea $w \in A^*$ una palabra, y $a \in A$ un símbolo. Denotamos por $|w|$ al largo de w es decir, el único valor k tal que $w \in A^k$ y por $|w|_a$ al número de veces que a aparece en w, es decir $|w|_a = |\{i \in [|w|]\colon w_i = a\}|$.

Definición 21. Sea $w \in A^*$. Llamamos *anagrama de w* (o permutación de w) a toda palabra w' que se puede obtener de w al permutar sus letras, y usamos $\mathrm{Per}(w)$ para denotar al conjunto de todas las permutaciones de w. Es decir

$$\mathrm{Per}(w) = \{w' \in A^*\colon |w'|_a = |w|_a \, \forall a \in A\}.$$

Proposición 32. *Para toda palabra $w \in A^*$,*

$$|\mathrm{Per}(w)| = \frac{|w|!}{\prod_{a\in A} |w|_a!}.$$

Daremos dos demostraciones de esta propiedad. Una por inducción y una combinatorial

Demostración.
(Inducción en $|A|$)|1| Para $|A| \leq 1$, la demostración es directa, pues $\mathrm{Per}(w) = \{w\}$ y $1 = \frac{1!}{1} = \frac{0!}{1}$, así que supongamos que $|A| \geq 2$. Sea a^* un símbolo cualquiera de A y sea $B = A \setminus \{a^*\}$. Para una palabra $v \in \mathrm{Per}(w)$, llamemos $v' \in B^*$ a la subpalabra de v obtenida al borrar las apariciones de a^*, y $\sigma(v) \in \binom{[|w|]}{|w|_{a^*}}$ al conjunto de posiciones j tal que $v_j = a^*$. La asignación $v \mapsto (v', \sigma(v))$ es una biyección entre $\mathrm{Per}(w)$ y $\mathrm{Per}(w') \times \binom{[|w|]}{|w|_{a^*}}$. Usando principio del producto e inducción tenemos que

$$|\mathrm{Per}(w)| = \frac{|w'|!}{\prod_{a\in B} |w'|_a!} \cdot \binom{|w|}{|w|_{a^*}} = \frac{|w'|!}{\prod_{a\in B} |w'|_a} \cdot \frac{|w|!}{|w'|!|w|_{a^*}!} = \frac{|w|!}{\prod_{a\in A} |w|_a!}.$$

(Demostración combinatorial),
Colguemos a cada letra a de w un índice i que representando el número de aparición de la letra a en w. Más formalmente, para todo $k \in [|w|]$ sea $\varphi(k) = (a, j)$ donde la j-ésima aparición de a en la palabra w se encuentra en la k-ésima posición de w. Con esto, $P := \varphi([|w|])$ es un conjunto de $|w|$ pares ordenados distintos.
Considere la función

$$\varphi\colon P^{\underline{|w|}} \to \mathrm{Per}(w) \times \prod_{a\in A} [|w|_a]^{\underline{|w|_a}}$$

dada por

$$\varphi((v_1, i_1)(v_2, i_2)\cdots(v_{|w|}, i_{|w|})) = (v, (s_a)_{a\in A})$$

donde $v = v_1v_2\ldots v_{|w|}$, y para cada $a \in A$, s_a es la subpalabra de $i_1i_2\ldots i_{|w|}$ obtenida al quedarse solo con los i_j tales que $v_j = a$. Esta función es biyectiva y prueba que

$$|w|! = |\varphi\colon P^{\underline{|w|}}| = |\mathrm{Per}(w)| \prod_{a\in A} |[|w|_a]^{\underline{|w|_a}}| = |\mathrm{Per}(w)| \prod_{a\in A} |w|_a! \quad \square$$

La expresión calculada en la proposición anterior aparece con relativa frecuencia, por lo cual recibe una notación especial.

Definición 22. Si $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ es una composición débil de $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^k n_i!}.$$

La proposición anterior indica que $\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ es exactamente el número de anagramas de una palabra con n_i símbolos de tipo i.

Clase 3

1. Particiones de un conjunto

Definición 23. Una secuencia $(A_1, \ldots, A_k)$ de conjuntos **no vacíos** y disjuntos par a par tal que $\bigcup_{i=1}^k A_i = A$ se conoce como *partición ordenada* de A.[1]

Las partes de una partición se conocen como bloques.

Definición 24. A cada partición ordenada $\Pi = (A_1, \ldots, A_k)$ de A en k bloques le asociamos la composición x de $|A|$ en k partes que satisface $x_i = |A_i|$, para $i \in [k]$.

Proposición 33. *Sea $c = (c_1, \ldots, c_k)$ una composición de $[n]$. El número de particiones ordenadas $(A_1, \ldots, A_k)$ de $[n]$ asociadas a la composición c es igual a*

$$\binom{n}{c_1, \ldots, c_k}.$$

Demostración. Basta notar que cada partición ordenada descrita se puede codificar de manera única como una permutación w de la palabra $1^{c_1}2^{c_2}\cdots k^{c_k}$, donde $w_j \in [k]$ representa el único índice tal que $j \in A_{w_j}$. $\square$

Definición 25. Un conjunto $\{A_1, \ldots, A_k\}$ formado por conjuntos **no vacíos** y disjuntos par a par tal que $\bigcup_{i=1}^k A_i = A$ se conoce como *partición* (no ordenada) de A.

Definición 26. A cada partición no ordenada $P = \{A_1, \ldots, A_k\}$ de A en k bloques le asociamos la partición (entera) x de $|A|$ que codifica los tamaños (ordenados de mayor a menor) de los bloques de P. Además, si m_i denota el número de bloques de tamaño i en P (es decir, $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es el vector de multiplicidades de x), diremos que P tiene *tipo* $m = (m_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Proposición 34. *Sea $a = (a_1, \ldots, a_k)$ una partición de n y sea $m = (m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ su vector de multiplicidades (es decir, número de veces que aparece i en a). El número de particiones de $[n]$ de tipo m (o equivalentemente, el número de particiones de $[n]$ asociadas a la partición a) es*

$$\binom{n}{a_1, \ldots, a_k}\frac{1}{m_1!\cdots m_n!}.$$

Demostración. Hay $\binom{n}{a_1,\ldots,a_k}$ formas de elegir una partición ordenada de $[n]$, (es decir, la parte i tiene a_i elementos). Sin embargo si reordenamos las partes que tienen el mismo tamaño obtenemos la misma partición de $[n]$. $\square$

Estudiemos un poco más las particiones.

Definición 27. Denotemos por $\mathcal{P}(n,k)$ al conjunto de todas las particiones no ordenadas de $[n]$ en k bloques no vacíos.

Definición 28. Números de Stirling del segundo tipo. Los valores $S(n,k) = |\mathcal{P}(n,k)|$ se conocen como números de Stirling del segundo tipo[2].

Calcular estos números no es una tarea directa. Algunos casos son simples:

Observación 10. Se cumple que:

1. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $S(n,n) = 1$.

[1] Notar la similitud entre partición ordenada de $[n]$ y composición de n.

[2] Esta cantidad también se denota en algunos libros como $\left\{ n \atop k \right\}$.

2. Para $n, k > 0$, $S(n, 0) = S(0, k) = 0$.
3. Para todo $k > n$, $S(n, k) = 0$.
4. Para todo $n > 1$, $S(n, n-1) = n$.

Proposición 35. *Los números* $(\quad S(n,k) \quad)_{n,k\geq 0}$ *están definidos por la siguiente recurrencia:*

$$\forall k, n \geq 1: \ S(n,k) = kS(n-1,k) + S(n-1,k-1).$$

con valores de borde, $S(0,0) = 1$*,* $S(n,0) = S(0,k) = 0$ *para* $n, k \geq 1$*.*

Demostración. Sea A el conjunto de las particiones de $\mathcal{P}(n,k)$ donde $\{n\}$ es un bloque en sí mismo y $B = \mathcal{P}(n,k) \setminus A$. Claramente A está en biyección con $\mathcal{P}(n-1,k-1)$ (borrando el bloque $\{n\}$). Además, hay una función k a 1 desde B hasta $\mathcal{P}(n,k+1)$ (dada por la operación "borrar n de su bloque"). $\square$

La siguiente propiedad relaciona las particiones no ordenadas con las particiones ordenadas

Proposición 36. *El número de particiones ordenadas de n en k bloques es $k!S(n,k)$.*

Demostración. Cada partición ordenada de $[n]$ en k bloques se obtiene tomando una partición (normal) en $\mathcal{P}(n,k)$ y luego ordenando las k partes. $\square$

En particular, concluimos la siguiente importante propiedad:

Proposición 37. *El número de funciones sobreyectivas de $[n] \to [k]$ es $k!S(n,k)$.*

Demostración. Cada función f sobreyectiva se puede ver como $(f^{-1}(1), \ldots, f^{-1}(k))$ que es una partición ordenada de $[n]$ en k bloques. $\square$

Discutamos un poco más las particiones de $[n]$.

Definición 29. Llamamos $B(n)$ al número total de particiones de $[n]$. Los números $(B(n))_{n\in\mathbb{N}}$ se conocen como números de Bell

Tenemos $B(0) = 1$ y $B(n) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)$. La siguiente proposición nos da otra recurrencia para calcular $B(n)$.

Proposición 38. *Los números $B(n)_{n\geq 0}$ estan definidos por la siguiente recurrencia:*

$$\forall n \geq 1: \ B(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B(k).$$

con valor de borde $B(0) = 1$*.*

Demostración. Propuesta. $\square$

Formas de barajar un mazo

Tenemos un mazo ordenado con n cartas distintas (mazo es $[n]$). Realicemos el siguiente proceso tomemos la primera carta de la baraja y ubiquémosla en una posición al azar (uniformemente) dentro del mazo (notar que con probabilidad $1/n$ el mazo queda ordenado). Repitamos el proceso anterior t veces. ¿Cuál es la probabilidad que el mazo resultante quede ordenado?

Para entender un poco la respuesta, codifiquemos los experimentos *al revés* del siguiente modo. Pensemos que el tiempo va hacia atrás y que partimos del mazo ordenado. En cada jugada tomamos una carta del mazo y la ubicamos al principio del mazo. Llamemos s_i a la etiqueta (la cara) de la carta que es movida hacia el principio en el i-ésimo paso.

Por ejemplo, si $n = 4$ y la $s = (2,1,2,3)$ entonces la secuencia de mazos es la siguiente

1234	mazo ordenado
2134	$s_1 = 2$
1234	$s_2 = 1$
2134	$s_3 = 2$
3214	$s_4 = 3$

¿Cuántas secuencias s dejan el mazo ordenado?
Notamos que cada secuencia s define naturalmente una partición $\varphi(s)$ de $[t]$ tomando como conjuntos (sin etiquetar) aquellos indices donde se levantan cartas iguales. Por ejemplo, tanto $(2,1,2,3)$ como $(3,1,3,2)$ definen la partición $\{1,3\},\{2\},\{4\}$, $(4,4,4,4)$ define la partición $\{1,2,3,\}$, etc.
Si llamamos $\mathcal{P}(t,\leq n)$ al conjunto de particiones de $[t]$ en a lo más n partes, la función anterior mapea secuencias de $[n]^t$ en particiones en $\mathcal{P}(t,\leq n)$ pero no de manera inyectiva.
Veamos que si restringimos esta función a aquellas secuencias que dejan el mapa ordenado, entonces la función es biyectiva. Es decir $|\{\text{secuencias de largo } t \text{ que dejan el mazo ordenado}\}| = |\mathcal{P}(t,\leq n)|$.
En efecto, tomemos una partición no ordenada Q de $[t]$ en a lo más n partes. Notemos que para que el mazo quede ordenado, la última carta levantada (la t-ésima) debe ser un 1. En particular la parte x_1 de Q que contiene a t debe provenir de un 1. Creemos entonces la secuencia $s(Q)$ que contiene 1 en los índices de x_1. Notemos ahora que la última carta levantada que no está en x_1 debe ser un 2. De aquí deducimos que la parte x_2 que contiene al índice mayor que no está en x_1 debe provenir con un 2. Por lo tanto en $s(Q)$ los índices de x_2 deben tener un 2. Sucesivamente notamos que la última carta levantada que no está en $\bigcup_{i=1}^k x_i$ debe ser un $k+1$, por lo que podemos definir x_{k+1} como la parte que contiene al mayor índice que no está en $\bigcup_{i=1}^k x_i$. Una vez que todas las partes estén etiquetadas, concluimos que la secuencia $s(Q)$ que contiene i en los índices de x_i es la única secuencia s que ordena el mazo tal que $\varphi(s) = Q$.
Concluimos que el número de secuencias de largo t que ordenan el mazo es igual a $\sum_{i=0}^n S(t,i)$, y en particular la probabilidad de que una secuencia al azar de largo n ordene el mazo es $B(n)/n^n$.

Definición 30. Llamamos $T(n)$ al número total de particiones ordenadas de $[n]$. Los números $(T(n))_{n\in\mathbb{N}}$ se conocen como números ordenados de Bell o números de Fubini.

Observamos que
$$T(n) = \sum_{k=0}^n k!S(n,k).$$

Resultados de una carrera con empates

¿De cuántas formas puede terminar una carrera de n caballos si pueden haber empates (varios que llegan al mismo tiempo)?
Exactamente de $T(n)$ maneras (número de Fubini).

Profesor: José Soto, jsoto@dim.uchile.cl

Clase 4

1. Las doce formas de repartir n pelotas en k cajas.

Queremos estudiar las maneras de repartir n pelotas en k cajas. Lo que hace el problema interesante es si las pelotas son todas iguales o no (distinguibles o indistinguibles), si las cajas son distinguibles o indistinguibles, y si imponemos alguna condición sobre la asignación. Las tres condiciones más interesantes son si la asignación es libre (irrestricta), sobreyectiva (en cada caja hay al menos una pelota) o inyectiva (en cada caja hay a lo más una pelota).
Con lo que llevamos estudiado en el curso podemos llenar la siguiente tabla.

Libre	Pelotas distintas	Pelotas iguales
Cajas distintas	k^n (k-secuencias de $[n]$, funciones)	$\mathrm{wcom}(n,k) = \left(\!\binom{k}{n}\!\right) = \binom{n+k-1}{n}$ (composiciones débiles de n en k partes)
Cajas iguales	$\sum_{i=0}^{k} S(n,i)$ (particiones de $[n]$ en a lo más k bloques)	$\sum_{i=0}^{k} p_i(n)$ (particiones de n en a lo más k partes)

Sobreyectiva	Pelotas distintas	Pelotas iguales
Cajas distintas	$S(n,k)k!$ (funciones sobreyectivas)	$\mathrm{com}(n,k) = \binom{n-1}{n-k}$ (composiciones de n en k partes)
Cajas iguales	$S(n,k)$ (particiones de $[n]$ en k bloques)	$p_k(n)$ (particiones de n en k partes)

Inyectiva	Pelotas distintas	Pelotas iguales
Cajas distintas	$k^{\underline{n}}$ (funciones inyectivas)	$\binom{k}{n}$ (elegir las n cajas con 1 pelota)
Cajas iguales	$[\![n \leq k]\!]$ (todas son iguales)	$[\![n \leq k]\!]$ (todas son iguales)

Observación 11. Muchas de las expresiones anteriores se simplifican cuando $n = k$.

Libre	Pelotas distintas	Pelotas iguales
Cajas distintas	n^n	$\binom{2n-1}{n}$
Cajas iguales	$B(n)$	$p(n)$

Inyectiva=Sobreyectiva	Pelotas distintas	Pelotas iguales
Cajas distintas	$n!$	1
Cajas iguales	1	1

También tiene sentido hacerse otras preguntas. Las siguientes quedan propuestas (en cada una hay que considerar los 4 casos de distinguibilidad).
¿Cuántas formas de repartir n pelotas en (un número arbitrario) de cajas de manera sobreyectiva?
¿Cuántas formas de repartir (un número arbitrario) de pelotas en k cajas de manera inyectiva?

2. Permutaciones y ciclos

En esta sección estudiaremos un poco más las permutaciones de $[n]$.

Definición 31. Decimos que $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ es un **ciclo** de $\pi \in \mathcal{S}_n$ si $\pi(a_1) = a_2$, $\pi(a_2) = a_3, \dots,$ $\pi(a_k) = a_1$.

Sea $\pi \in \mathcal{S}_n$. Es fácil ver que cada elemento $i \in [n]$ pertenece a exactamente un ciclo de π. Esta observación nos dice que cada permutación está definida por sus ciclos.

Definición 32. Las permutaciones de $\mathcal{S}_n$ que contienen un solo ciclo se conocen como *permutaciones circulares*

Proposición 39. *Sea $n \geq 1$. El número de permutaciones circulares de $\mathcal{S}_n$ es $(n-1)!$.*

Demostración. Sea $\mathcal{C}(n,1)$ el conjunto de todas las permutaciones circulares de $\mathcal{S}_n$. Consideremos la función

$$\begin{aligned} \varphi \colon \mathcal{S}_n &\to \mathcal{C}(n,1) \\ \varphi(\pi) &= (\pi_1, \dots, \pi_n) \end{aligned}$$

La función φ no es inyectiva. Notamos que para cada $(\tau) := (\tau_1, \dots, \tau_n) \in \mathcal{C}(n,1)$, las únicas palabras π tal que $\varphi(\pi)$ es igual a τ son *rotaciones* de la palabra $\tau_1 \dots \tau_n$. De aquí se concluye que $|\varphi^{-1}((\tau))| = n$, y usando que $\mathcal{S}_n = \bigcup_{(\tau)\in C(n,1)} \varphi^{-1}((\tau))$ se deduce que $n! = |\mathcal{C}(n,1)|n$, es decir, $|\mathcal{C}(n,1)| = (n-1)!$. □

Consideremos ahora el siguiente problema: Sean $c_1, c_2, \dots, c_n$ números naturales. ¿De cuántas formas podemos ubicar $n = \sum_{i=1}^{k} ic_i$ personas en c_1 mesas redondas para 1 persona, c_2 mesas redondas para dos personas, etc.; donde dos configuraciones se consideran iguales si en ambas configuraciones cada persona tiene el mismo vecino a su derecha y el mismo vecino a la izquierda? En el lenguaje de permutaciones, lo que estamos preguntando es cuantas permutaciones tienen exactamente c_i ciclos de tamaño i para cada $i \in [n]$.

Definición 33. El **tipo** de una permutación $\pi \in \mathcal{S}_n$ es el vector $(m_1, \dots, m_n)$ donde m_i es la cantidad de ciclos de tamaño i en π.
Notar que directamente se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} im_i = n.$$

Proposición 40. *El número de permutaciones de tipo $m = (m_1, \dots, m_n)$ es*

$$\frac{n!}{m_1! \cdots m_n!} \frac{1}{1^{m_1} 2^{m_2} \cdots n^{m_n}}.$$

Demostración. Daremos dos demostraciones de este hecho. Sea $\mathcal{S}(m)$ el conjunto de permutaciones de tipo m. En la primera demostración codificamos cada permutación π como

$$\pi = \underbrace{(*) \cdots (*)}_{m_1} \underbrace{(*,*) \cdots (*,*)}_{m_2} \cdots \underbrace{(*,\dots,*) \cdots (*,\dots,*)}_{m_n}, \tag{4.1}$$

donde los paréntesis codifican los ciclos de π. Si reemplazamos los asteriscos por una palabra $w \in \mathcal{S}_n = ([n])_n$ obtenemos una permutación $\varphi(w)$ con el tipo deseado. Sin embargo cada permutación puede provenir de varias palabras. De esta forma

$$\mathcal{S}_n = \bigcup_{\pi \in \mathcal{S}(m)} \varphi^{-1}(\pi).$$

Calculemos $|\varphi^{-1}(\pi)|$. Notemos que si permutamos los ciclos de largo i de w entre si obtenemos la misma permutación. Esta operación se puede hacer de $m_1!m_2! \dots m_n!$ maneras. Finalmente, podemos *rotar* cada ciclo individual decidiendo quien es su primer elemento $(1325) = (3251) = (2513) = (5132)$. Esto se puede hacer para cada ciclo de largo i de i maneras. Esto muestra que $|\varphi^{-1}(\pi)| = (m_1!m_2! \cdots m_n!) \cdot 1^{m_1} 2^{m_2} \cdots n^{m_n}$.
De la fórmula arriba se obtiene que $n! = (m_1!m_2! \cdots m_n!) \cdot 1^{m_1} 2^{m_2} \cdots n^{m_n} \cdot |\mathcal{S}(m)|$, lo que prueba lo pedido.
En la segunda demostración notamos que cada permutación de tipo m se puede obtener seleccionando primero una partición de tipo m y luego eligiendo una permutación circular de cada uno de sus bloques. Sea $a = (a_1, \dots, a_k)$ la

partición de n asociada al vector de multiplicidades m, es decir a_1 es el tamaño del bloque más grande, a_2 es el siguiente y así sucesivamente. Lo anterior nos dice que

$$\begin{aligned} |\mathcal{S}(m)| &= \binom{n}{a_1, \ldots, a_k} \frac{1}{m_1! \cdots m_n!} \cdot (a_1 - 1)! \cdots (a_k - 1)! \\ &= \frac{n!}{m_1! \cdots m_n!} \frac{1}{a_1 \cdots a_k} = \frac{n!}{m_1! \cdots m_n!} \frac{1}{1^{m_1} 2^{m_2} \cdots n^{m_n}}. \end{aligned}$$ □

Estudiemos un poco más las permutaciones con un número fijo de ciclos.

Definición 34. Sea $\mathcal{C}(n, k)$ el conjunto de permutaciones de $[n]$ con k ciclos.

Definición 35. Números de Stirling sin signo.
Llamamos $\left[{n \atop k}\right]$ (algunos autores usan $c(n, k)$) al conjunto de permutaciones en $\mathcal{S}_n$ con exactamente k ciclos. La familia $\left(\left[{n \atop k}\right]\right)_{n,k \in \mathbb{N}}$ se conoce como números de Stirling sin signo.

Definición 36. Números de Stirling del primer tipo. Los valores $s(n, k) = (-1)^{n-k} \left[{n \atop k}\right]$ se conocen como números de Stirling del primer tipo.

Al igual que con los números de Stirling del segundo tipo, estos números no son necesariamente simples de calcular.

Observación 12. Se cumple que:

1. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\left[{n \atop n}\right] = 1$.
2. Para $n, k > 0$, $\left[{n \atop 0}\right] = \left[{0 \atop k}\right] = 0$.
3. Para todo $k > n$, $\left[{n \atop k}\right] = 0$.
4. Para todo $n > 1$, $\left[{n \atop n-1}\right] = \binom{n}{2}$.

La siguiente recurrencia define los números de Stirling sin signo.

Proposición 41. *Los números* $\left(\left[{n \atop k}\right] \right)_{n,k \geq 0}$ *están definidos por la siguiente recurrencia:*

$$\forall n, k \geq 1 : \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$$

con valores de borde, $\left[{0 \atop 0}\right] = 1$, $\left[{n \atop 0}\right] = \left[{0 \atop k}\right] = 0$ *para* $n, k \geq 1$.

Demostración. Sea A el conjunto de de permutaciones en $\mathcal{C}(n+1, k+1)$ donde $n+1$ es un ciclo en si mismo y $B = \mathcal{C}(n+1, k+1) \setminus A$.
Para cada permutación $\pi \in \mathcal{C}(n+1, k+1)$, definamos $\varphi(\pi)$ como la permutación obtenida de eliminar el símbolo $n+1$ del ciclo en el que está. Notemos que $\varphi(\pi)$ tiene k ciclos (si $\pi \in A$) o $k+1$ ciclos (si $\pi \in B$). Es fácil ver que $\varphi \colon A \to \mathcal{C}(n, k)$ es biyectiva. Por otro lado, cada $\tau \in \mathcal{C}(n, k+1)$ puede provenir de varias permutaciones en $\mathcal{C}(n+1, k+1)$. ¿De cuántas? Si τ está escrita como una lista de ciclos en orden entonces podemos insertar $n+1$ en n lugares: justo antes de cada símbolo. De aquí se tiene que $\varphi \colon B \to \mathcal{C}(n, k+1)$ es una función n a 1 (i.e. $|\varphi^{-1}(\tau)| = n$). Con esto $|\mathcal{C}(n+1, k+1)| = |A| + |B| = |\mathcal{C}(n, k)| + n|\mathcal{C}(n, k+1)|$. □