Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-3 Probabilidades y Estadística
Primavera 2015

## Guía ejercicios para el examen

**1.** Para una distribución normal con esperanza $\mu$ y varianza $\sigma^2 = 25$, se desea realizar un test de las hipótesis $H_0 : \mu = 10$ versus $H_1 : \mu = 5$. Encuentre el tamaño $n$ de la muestra tal que el test más potente tenga $\alpha = \beta = 0{,}025$, donde $\alpha$ y $\beta$ son la probabilidad del error de tipo I y II, respectivamente.

**2.** Se dispone de una m.a.s. $X_1, \ldots, X_n$ proveniente de una distribución exponencial de parámetro $\lambda > 0$ desconocido. Sean $\alpha = 5\,\%$, $\lambda_1 > \lambda_0 > 0$ valores dados. Se plantean las hipótesis

$$H_0 : \lambda = \lambda_0$$
$$H_1 : \lambda = \lambda_1,$$

*a*) Muestre que el test más potente tiene región de rechazo de la forma $R = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \leq \text{Cte}\}$. ¿Es uniformemete más potente entre todos los tests tales que $\lambda_1 > \lambda_0$?

*b*) Escriba esta región de rechazo de la forma

$$R = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \frac{\bar{x} - 1/\lambda_0}{1/(\lambda_0\sqrt{n})} \leq c \right\},$$

donde $c$ es una constante. Aproximando con un teorema adecuado, mueste que el valor de $c$ tal que la probabilidad del error tipo I es igual al $\alpha$ especificado, corresponde a $c = -1{,}65$.

*c*) De aquí en adelante suponga que $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = 2$ y $n = 25$. Nuevamente aproximando con un teorema adecuado, calcule la potencia del test del ítem anterior.

*d*) Suponga que el promedio observado en la muestra es 0,6. Aproximando nuevamente, calcule el $p$-valor del test. ¿Debe o no rechazarse $H_0$?

**3.** El voltaje de salida de un cierto circuito eléctrico debería ser 130 de acuerdo a las especificaciones técnicas. Se toma una muestra de 40 mediciones independientes del voltaje de este circuito, y se obtiene un promedio de 128,6 y una desviación estándar (es decir, la raíz del estimador insesgado de la varianza) de 2,1. Realice un test a nivel 5 % para la hipótesis de que la esperanza del voltaje es igual a 130 versus la alternativa de que es menor estricto que 130. ¿Cuál es el $p$-valor del test?

**4.** Una conocida marca de alimentos afirma que sus cajas de cereales contienen 50gr de almendras en esperanza, pero usted sospecha que contienen estrictamente menos. Para verificar su afirmación, usted cuidadosamente separa las almendras de 9 cajas de cereales, y al pesarlas obtiene 49gr, 51gr, 46gr, 49gr, 51gr, 48gr, 51gr, 46gr y 50gr. Suponga que la variable en consideración tiene distribución normal con ambos parámetros desconocidos.

*a*) Calcule el $p$-valor del test que resuelve su sospecha. Para un nivel de confianza del 5 %, ¿qué se puede concluir?

*b*) En la caja de cereales se especifica que la raíz de la varianza de la cantidad de almendras es de 4gr, pero usted nuevamente sospecha que es estrictamente menor. ¿Cuál es el $p$-valor del test correspondiente? ¿Qué se concluye si se usa un nivel de confianza del 5 %?

**5.** Una empresa fabrica ciertas piezas cuyo grosor debería ser de 7cm. Debido a pruebas realizadas sobre la producción, existe la sospecha de que la máquina que produce las piezas esté defectuosa, haciendo que estas tengan un menor grosor del deseado. Suponga que se obtiene una muestra aleatoria simple $X_1, \ldots, X_{25}$ de los grosores de estas piezas, tal que $\sum X_i = 172{,}508$ y su varianza muestral insesgada es $s^2 = 0{,}04$. Asuma además que el grosor de una pieza es una v.a. normal. Realice un test de hipótesis y calcule el $p$-valor. Indique su conclusión para un nivel de significación de $\alpha = 5\,\%$.

**6.** Una autopista posee 4 pistas, y se desea investigar si los conductores tienen preferencia por alguna de ellas. Se observó la pista por la que transitaron 1000 automóviles, cuyos resultados se resumen en la siguiente tabla. Calcule el $p$-valor (o una aproximación) del test correspondiente, e indique su conclusión para $\alpha = 5\,\%$.

| Pista | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Cantidad observada | 275 | 220 | 260 | 255 |

**7.** *a*) Considere una m.a.s. $X_1, \ldots, X_n$ proveniente de una variable $\text{bin}(m, p)$, con $m$ conocido y $p$ desconocido. Muestre que los estimadores de $p$ de máxima verosimilitud y de los momentos coinciden con $\hat{p} = \bar{X}/m$. Muestre que es insesgado y que converge casi seguramente a $p$ cuando $n \to \infty$.

En un centro comercial hay 3 tiendas de la misma cadena, y se desea investigar la forma en que los clientes deciden entrar o no entrar en cada una de ellas. Se propone el siguiente modelo: cada cliente decide entrar a una tienda con probabilidad $p$ (desconocida), y decide no entrar con probabilidad $1 - p$, independiente de las otras dos tiendas y del resto de los clientes. Se le hace un seguimiento a $n = 64$ clientes, cuyos resultados se resumen en la siguiente tabla:

| Cantidad de tiendas visitadas | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Cantidad de clientes | 6 | 30 | 18 | 10 |

*b*) Muestre que el valor del estimador de máxima verosimilitud de $p$ que se obtiene de acuerdo a los datos es $\hat{p} = 1/2$. Plantee las hipótesis del test de bondad de ajuste para el modelo propuesto, especificando el valor de $p_i$ bajo $H_0$, para cada $i = 0, 1, 2, 3$.

*c*) Realice el test y concluya para $\alpha = 10\,\%$.

**8.** Los empleados en una fábrica deben asistir a una capacitación para aprender a armar los componentes de un determinado producto. Existen dos posibles capacitaciones, la Estándar y la Novedosa. Antes de escoger permanentemente una de ellas, se envía a 9 empleados a capacitarse en la primera y a otros 9 a capacitarse en la segunda, y luego se midió el tiempo (en segundos) que tardó cada empleado en armar el producto. Los datos relevantes de estas mediciones se resumen en la siguiente tabla:

| | Estándar | Novedosa |
|---|---|---|
| Tiempo promedio | 35,22 | 31,56 |
| $\sum(x_i - \bar{x})^2$ | 195,56 | 160,22 |

Suponiendo que las muestras provienen de distribuciones normales con la misma varianza, ¿hay suficiente evidencia para afirmar que las capacitaciones generan tiempos de armado promedio distintos? Use $\alpha = 0{,}05$.

**9.** Se desea investigar la efectividad de una nueva vacuna. Se toma una muestra de 1000 personas, a algunas de las cuales se les da 1 dosis de la vacuna, a otras se les da 2 dosis, y al resto no se les vacuna. Pasadas 2 semanas se observa si las personas enfermaron. Se resume la información en la siguiente tabla:

| | Sin vacuna | 1 dosis | 2 dosis |
|---|---|---|---|
| Enfermo | 24 | 9 | 13 |
| Sano | 289 | 100 | 565 |

¿Hay suficiente evidencia para afirmar que la vacuna tiene un efecto observable?

**10.** En un estudio se clasificó a 80 televidentes en "audiencia de alta violencia" y "audiencia de baja violencia", de acuerdo a los programas de televisión que ellos habituaban ver. Los resultados, segmentados por grupos de edad, se muestran en la siguiente tabla. ¿Hay suficiente evidencia para afirmar, al nivel 5 %, que el tipo de audiencia es independiente de la edad del televidente? Entregue el $p$-valor del test (o al menos una cota).

| Violencia \ Edad | 16-34 | 35-54 | 55 ó más |
|---|---|---|---|
| Baja | 8 | 11 | 21 |
| Alta | 18 | 15 | 7 |