Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-4 Probabilidades y Estadística
Otoño 2016

Roberto Cortez
Cristóbal Parraguez
Bryan Sagredo

Control 2

9 de mayo de 2016
Tiempo: 3 horas

P1. *a*) (2,5 ptos.) Se anuncia un corte de luz en su sector de la ciudad, por lo cual usted decide cargar 4 baterías para un cierto dispositivo electrónico. Los tiempos que tardan en cargarse son: 5 horas, 3 horas, 1 hora y 1 hora, y usted las va a cargar una después de otra en ese orden. Suponiendo que el tiempo que tarda en cortarse la luz es una variable aleatoria uniforme entre 0 y 12 horas, calcule la esperanza de la cantidad de baterías que quedan *completamente* cargadas.

b) Decimos que una variable aleatoria X tiene distribución *gamma* de parámetros $\lambda > 0$ y $\theta > 0$ si su densidad es

$$f_X(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{\theta-1}}{\Gamma(\theta)}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x),$$

donde Γ es la *función gamma*, definida como $\Gamma(\theta) = \int_0^\infty z^{\theta-1}e^{-z}dz$.

1) (1,5 ptos.) Muestre que $M_X(t) = \lambda^\theta/(\lambda - t)^\theta$ para $t < \lambda$.
2) (1,0 pto.) Deduzca la esperanza y varianza de X.
3) (1,0 pto.) Sean $X_1, \dots, X_n$ variables independientes con distribución exponencial de parámetro λ. Muestre que $X_1 + \cdots + X_n$ tiene distribución gamma de parámetros λ y n.

P2. *a*) (3,0 ptos.) n bolitas negras y m moradas se ponen en fila y se permutan al azar. Se define una *racha* como una secuencia consecutiva de bolitas negras (por ejemplo, NNNMMNMNN tiene 3 rachas). Calcule la cantidad esperada de rachas. *Indicación:* defina variables indicatrices adecuadas.

b) (3,0 ptos.) Sean X e Y variables independientes con ley $\exp(\lambda)$. Calcule la densidad conjunta y las densidades marginales de $U = X + Y$ y $V = X/(X + Y)$. ¿Qué variables conocidas son U y V? ¿Son independientes?

P3. Decimos que la variable aleatoria X tiene distribución de *Pareto* con parámetros $m, \alpha > 0$, anotado $X \sim \text{Pareto}(m, \alpha)$, si su densidad está dada por

$$f_X(x) = \frac{\alpha m^\alpha}{x^{\alpha+1}}\mathbb{1}_{[m,\infty)}(x).$$

a) (1,2 ptos.) Calcule $\mathbb{E}(X)$, indicando para cuáles valores es finita.

b) (1,2 ptos.) Calcule $\text{var}(X)$, indicando para cuáles valores es finita.

c) (1,2 ptos.) Sea $Y \sim \exp(\lambda)$. Muestre que e^Y tiene distribución de Pareto. ¿Con qué parámetros?

d) (1,2 ptos.) Sea $k > m$. Muestre que, condicional en el evento $X > k$, la variable X tiene distribución de Pareto de parámetros k y α. Es decir, muestre que $\mathbb{P}(X > x \mid X > k) = \mathbb{P}(Y > x)$ para todo $x \geq k$, donde $Y \sim \text{Pareto}(k, \alpha)$.

e) (1,2 ptos.) La distribución de Pareto suele utilizarse para modelar la distribución de la riqueza en un país, siendo $f_X(x)$ la densidad de personas que poseen riqueza x, y $\mu = \mathbb{E}(X)$ representa la riqueza total del país. Para un cierto valor α^*, la distribución cumple la "ley 80-20": el 80 % de la riqueza la posee el 20 % de la población, es decir, $\int_b^\infty x f_X(x)dx = 80\,\% \times \mu$, donde b es tal que $\mathbb{P}(X > b) = 20\,\%$. Calcule el valor de α^*.