Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-4 Probabilidades y Estadística
Otoño 2016

Roberto Cortez
Cristóbal Parraguez
Bryan Sagredo

Pauta Control 1

P1. *a*) La probabilidad que una persona posea cuenta de ahorro es de 0,58. La probabilidad que posea cuenta vista es de 0,68. La probabilidad que posea ambas cuentas es de 0,34. Determine la probabilidad:

1) (1,0 pto.) que posea alguna de las cuentas;

> **Solución.** Consideremos los eventos
>
> $$\begin{aligned} A &: \text{la persona posee cuenta de ahorro,} \\ V &: \text{la persona posee cuenta vista.} \end{aligned}$$
>
> Queremos calcular $\mathbb{P}(A \cup V)$. Usando una propiedad conocida, tenemos:
>
> $$\mathbb{P}(A \cup V) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(AV) = 0{,}58 + 0{,}68 - 0{,}34 = 0{,}92.$$

2) (0,5 ptos.) que posea solo cuenta de ahorro;

> **Solución.** Queremos calcular $\mathbb{P}(AV^c)$. Usando la propiedad de la unión disjunta (axioma 3), tenemos:
>
> $$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(AV \cup AV^c) = \mathbb{P}(AV) + \mathbb{P}(AV^c).$$
>
> Es decir, $\mathbb{P}(AV^c) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(AV) = 0{,}58 - 0{,}34 = 0{,}24$.

3) (0,5 ptos.) que posea solo cuenta vista.

> **Solución.** Análogo a la parte anterior: queremos calcular $\mathbb{P}(VA^c)$. Tenemos:
>
> $$\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(VA \cup VA^c) = \mathbb{P}(VA) + \mathbb{P}(VA^c),$$
>
> luego $\mathbb{P}(VA^c) = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(VA) = 0{,}68 - 0{,}34 = 0{,}34$.

4) (1,0 pto.) Si la persona posee cuenta de ahorro, determine la probabilidad que posea cuenta vista. Determine si poseer cuenta vista es independiente de poseer cuenta de ahorro.

> **Solución.** Queremos calcular $\mathbb{P}(V \mid A)$. Por definición de probabilidad condicional:
>
> $$\mathbb{P}(V \mid A) = \frac{\mathbb{P}(VA)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0{,}34}{0{,}58} = \frac{17}{29}.$$
>
> Notemos que $\mathbb{P}(V \mid A) = 17/29 < 17/25 = 0{,}68 = \mathbb{P}(V)$, es decir, la probabilidad de poseer cuenta vista disminuyó al suponer que tenía cuenta de ahorro. Esto significa que los eventos no son independientes.

b) En una competencia de ciclismo por países compiten 3 brasileños, 4 argentinos, 2 uruguayos y 1 chileno. Suponga que no se distingue a los competidores por nombre, sólo por su nacionalidad.

1) (1,5 ptos.) ¿De cuántas maneras puede resultar la competencia?

Solución. El problema es equivalente a distribuir 10 bolitas numeradas de 1 a 10 (representando las posiciones en que terminan los competidores) en 4 grupos de tamaños 3, 4, 2 y 1 (representando las distintas nacionalidades). Luego, la cantidad buscada es

$$\binom{10}{3,4,2,1}.$$

2) (1,5 ptos.) ¿De cuántas formas puede ocurrir que de los 3 brasileños haya uno en los 3 primeros puestos y 2 en los últimos 3?

Solución. La cantidad buscada es

$$\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{7}{4,2,1} = 9\binom{7}{4,2,1}.$$

El término $\binom{3}{1} = 3$ corresponde a la cantidad de formas de escoger una posición dentro de las 3 primeras, y el término $\binom{3}{2} = 3$ son las formas de escoger 2 posiciones dentro de las 3 últimas. Hecho lo anterior, se ubican a los 3 brasileros en las posiciones escogidas (1 forma de hacerlo) y se ubican a los 7 ciclistas restantes en las posiciones disponibles ($\binom{7}{4,2,1}$ formas, lo cual puede verse con un razonamiento análogo a la parte previa).

P2. *a)* Hay dos fábricas de radios. Cada radio producida en la fábrica A sale defectuosa con probabilidad 0,05, mientras que una producida en la fábrica B sale defectuosa con probabilidad 0,01 (independiente de las otras radios producidas). Usted compra dos radios que provienen de la misma fábrica, la cual puede ser A o B con la misma probabilidad.

1) (1,5 ptos.) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera radio que usted revisa salga defectuosa?

Solución. Sean los eventos:

$$\begin{aligned} A &: \text{radios provienen de fábrica } A \\ B &: \text{radios provienen de fábrica } B \\ D_1 &: \text{primera radio está defectuosa} \\ D_2 &: \text{segunda radio está defectuosa} \end{aligned}$$

Calculemos la probabilidad de que la primera radio salga defectuosa, aplicando probabilidades totales:

$$\mathbb{P}(D_1) = \mathbb{P}(D_1 \mid A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(D_1 \mid B)\mathbb{P}(B) = \frac{5}{100}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{100}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{100}.$$

2) (1,5 ptos.) Si la primera radio revisada salió defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda también lo esté?

Solución. Ahora nos piden calcular la probabilidad de que la segunda radio salga defectuosa dado que la primera lo fue, es decir:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D_2 \mid D_1) = \frac{\mathbb{P}(D_2D_1)}{\mathbb{P}(D_1)} &= \frac{\mathbb{P}(D_2D_1 \mid A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(D_2D_1 \mid B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(D_1)} \\ &= \frac{\left(\frac{5}{100}\right)^2\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{100}\right)^2\cdot\frac{1}{2}}{\frac{3}{100}} = \frac{1}{6}\cdot\frac{25+1}{100} = \frac{13}{300}, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado el hecho que, condicional a que las radios provienen de la fábrica A, los eventos D_1 y D_2 son independientes (ídem para la fábrica B).

b) (3,0 ptos.) Se lanza una moneda con probabilidad p de cara hasta que aparezca dos veces *seguidas* el mismo resultado. Sea X la variable aleatoria de la cantidad de lanzamientos realizados. Indique el rango de X y su función de distribución discreta p_X. *Indicación:* distinga los casos pares e impares.

Solución. Como se necesitan por lo menos 2 lanzamientos para que se repita un resultado, es claro que $R_X = \{2, 3, \ldots\}$. Además, para que ocurra $X = k$ se necesita que las caras y sellos se vayan alternando, hasta que en el lanzamiento k-ésimo se repite el resultado previo. Luego: para cualquier $k \in R_X$ par, separando los casos en que la primera moneda es cara o sello, tenemos

$$\begin{aligned} p_X(k) = \mathbb{P}(X = k) &= \underbrace{p(1-p)p(1-p)\cdots p(1-p)}_{k-2 \text{ términos}}\, p^2 + \underbrace{(1-p)p(1-p)p\cdots(1-p)p}_{k-2 \text{ términos}}(1-p)^2 \\ &= p^{\frac{k-2}{2}}(1-p)^{\frac{k-2}{2}}[p^2 + (1-p)^2]. \end{aligned}$$

Para $k \in R_X$ impar es similar:

$$\begin{aligned} p_X(k) = \mathbb{P}(X = k) &= \underbrace{p(1-p)p(1-p)\cdots p(1-p)}_{k-1 \text{ términos}}(1-p) + \underbrace{(1-p)p(1-p)p\cdots(1-p)p}_{k-1 \text{ términos}}\, p \\ &= p^{\frac{k-1}{2}}(1-p)^{\frac{k-1}{2}}. \end{aligned}$$

P3. *a*) (3,0 ptos.) Se dispone de n bolitas negras y m moradas, con $n \leq m + 1$, y se ubican las bolitas al azar en una fila. ¿Cuál es la probabilidad de que no queden dos o más bolitas negras juntas? *Indicación:* para contar los casos favorables, ubique primero las bolitas moradas en una fila, y razone en términos de los *espacios* que quedan entre ellas (incluyendo los extremos).

Solución. Trabajamos con el espacio equiprobable de las formas de ubicar las $n+m$ bolitas en una fila sin distinguir bolitas del mismo color. Esto equivale a escoger n de las $n + m$ posiciones en la fila donde ubicar a las n bolitas negras (las m moradas se ubican en las posiciones restantes), lo cual puede hacerse de $\binom{n+m}{n}$ formas.

Siguiendo la indicación: si las bolitas moradas están en una fila, es claro que si ubicamos a lo más una bolita negra por cada espacio entre bolitas moradas, se obtendrá una configuración en que no hay 2 bolitas negras juntas, y eso cubre todos los posibles casos. Notando que hay $m + 1$ espacios entre bolitas moradas (incluyendo a los "espacios" a la izquierda de la primera bolita morada y a la derecha de la última), es claro que lo anterior puede hacerse de $\binom{m+1}{n}$ formas.

Sabiendo que en un espacio equiprobable las probabilidades se calculan como casos favorables sobre casos totales, tenemos que la probabilidad buscada es

$$\frac{\binom{m+1}{n}}{\binom{n+m}{n}} = \frac{\frac{(m+1)!}{n!(m+1-n)!}}{\frac{(n+m)!}{n!m!}} = \frac{(m+1)!m!}{(m+1-n)!(n+m)!}.$$

b) Un cultivo de bacterias de un cierto tipo puede proliferar o bien extinguirse, lo que ocurre con probabilidades p y $1 - p$, respectivamente. Para realizar un estudio, usted genera n de estos cultivos de manera independiente.

1) (1,0 ptos.) Indique la función p_X de la variable aleatoria X correspondiente al número de

cultivos que proliferan.

Solución. Para un cultivo específico, denotamos "éxito" que el cultivo prolifere (probabilidad p) y "fracaso" que se extinga (probabilidad $1-p$). Luego, la variable X corresponde a la cantidad de éxitos de un total de n realizaciones independientes. Por lo visto en cátedra, $X \sim \mathrm{binom}(n,p)$, es decir, $p_X(k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ para todo $k \in \{1,\dots,n\}$.

2) (2,0 ptos.) Debido a un corte de luz, el sistema de refrigeración de los cultivos deja de funcionar por unas horas, lo cual significa que cada cultivo que proliferó inicialmente se mantendrá vivo o se extinguirá, con probabilidades q y $1-q$ respectivamente, independiente del resto. ¿Cuál es la distribución de la variable aleatoria Y correspondiente a los cultivos que quedan vivos? *Indicación:* usando una propiedad adecuada, condicione en los posibles resultados de X.

Solución. Siguiendo la indicación, usando la regla de probabilidades totales, para todo $k \in \{1,\dots,n\}$ tenemos

$$p_Y(k) = \mathbb{P}(Y=k) = \sum_{m=0}^{n} \mathbb{P}(Y=k \mid X=m)\mathbb{P}(X=m).$$

Para $m<k$, si proliferaron m cultivos es imposible que hayan sobrevivido k, por lo cual $\mathbb{P}(Y=k \mid X=m)=0$, lo cual significa que la sumatoria anterior puede considerarse desde $m=k$. Para $m \geq k$, razonando como en la parte previa, es claro que si se asume $X=m$, entonces $Y \sim \mathrm{binom}(m,q)$, es decir, $\mathbb{P}(Y=k \mid X=m) = \binom{m}{k}q^k(1-q)^{m-k}$. Con esto, y sabiendo que $\mathbb{P}(X=m) = \binom{n}{m}p^m(1-p)^{n-m}$ por la parte anterior, tenemos:

$$\begin{aligned}
p_Y(k) &= \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} q^k(1-q)^{m-k}\binom{n}{m}p^m(1-p)^{n-m} \\
&= \frac{q^k}{k!}\sum_{m=k}^{n} \frac{n!}{(n-m)!(m-k)!}(1-q)^{m-k}p^m(1-p)^{n-m} \\
&= \frac{q^k}{k!}\sum_{m=0}^{n-k} \frac{n!}{(n-m-k)!m!}(1-q)^{m}p^{m+k}(1-p)^{n-m-k} \\
&= \frac{n!(pq)^k}{k!(n-k)!}\sum_{m=0}^{n-k} \frac{(n-k)!}{(n-m-k)!m!}[(1-q)p]^{m}(1-p)^{n-k-m} \\
&= \binom{n}{k}(pq)^k[\underbrace{(1-q)p+(1-p)}_{1-pq}]^{n-k},
\end{aligned}$$

donde en el último paso hemos utilizado el Teorema del Binomio. Hemos probado que $p_Y(k) = \binom{n}{k}(pq)^k(1-pq)^{n-k}$, lo cual corresponde a que $Y \sim \mathrm{binom}(n,pq)$.
Lo anterior también puede argumentarse en palabras como sigue: por cada cultivo, se declara el experimento exitoso si éste proliferó *y además* se mantuvo vivo, lo cual ocurre con probabilidad pq, y en otro caso se declara como fracaso. La variable Y corresponde exactamente a la cantidad de éxitos, la cual, por un argumento análogo a la parte anterior, tiene distribución $\mathrm{binom}(n,pq)$.