Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-4 Probabilidades y Estadística
Otoño 2016

Guía ejercicios 1

1. *a*) Pruebe que $\mathbb{P}(EF^c) = \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(EF)$.

b) Pruebe que $\mathbb{P}(E^cF^c) = 1 - \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(EF)$.

c) Pruebe que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E \cup F \cup G) &= \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(G)\\ &\quad - \mathbb{P}(E^cFG) - \mathbb{P}(EF^cG)\\ &\quad - \mathbb{P}(EFG^c) - 2\mathbb{P}(EFG).\end{aligned}$$

2. Sean $A_1, \ldots, A_n$ eventos tales que $\mathbb{P}(A_i) = 1\ \forall i$. Pruebe que $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = 1$.

3. La probabilidad que una persona posea cuenta de ahorro es de 0,58. La probabilidad que posea cuenta vista es de 0,68. La probabilidad que posea ambas cuentas es de 0,34. Determine la probabilidad:

a) Que posea alguna de las cuentas.

b) Que posea solo cuenta de ahorro.

c) Que posea solo cuenta vista.

d) Si la persona posee cuenta de ahorro, determine la probabilidad que posea cuenta vista.

4. Juan, Pedro y Emilio lanzan por turnos una moneda, y gana el primero que obtiene cara (suponga que ese es el orden en que lanzan). Explique por qué puede tomarse como espacio muestral $\Omega = \{1, 01, 001, 0001, 00001, \ldots\}$ y escriba los eventos “gana Juan”, “gana Pedro” y “gana Juan o Pedro” como subconjuntos de dicho Ω.

5. Dos dados equilibrados se lanzan sucesivamente n veces. Defina un espacio muestral y una probabilidad adecuados para este experimento. Calcule la probabilidad de que aparezca al menos un doble 6. ¿Cuál es el primer n tal que esta probabilidad es de $1/2$ ó más?

6. Un mazo inglés (52 cartas) se revuelve y se van mostrando las cartas una por una. Dé un espacio muestral adecuado para describir este experimento. ¿Cuál es la probabilidad de que la décimocuarta carta sea un as? ¿Cuál es la probabilidad de que el primer as aparezca en la décimocuarta carta?

7. En un curso de 40 alumnos deben formarse 3 equipos de baby fútbol (5 jugadores) y 1 de vóleibol (6 jugadores). ¿De cuántas formas pueden armarse los equipos si

a) los equipos de fútbol son distinguibles entre sí?

b) los equipos de fútbol son indistinguibles entre sí?

8. Probar (sin desarrollar las fórmulas) que

$$\binom{n+1}{4} = \frac{1}{3}\binom{\binom{n}{2}}{2}.$$

Indicación: considere un grupo de $n+1$ objetos de los cuales uno es especial y cuente de dos maneras el número de subconjuntos de tamaño 4.

9. Considere un grupo de n personas. Calculando de dos maneras el número de posibles selecciones de un comité y un jefe del comité, muestre que

$$\sum_{i=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

10. ¿Cuántas derivadas de orden r tiene una función de n variables de la forma $f(x_1, \ldots, x_n)$?

11. Dado $n \in \mathbb{N}$, se define F_n como el conjunto de todas las funciones de $\{1, \ldots, n\}$ en $\{1, \ldots, n\}$. Dado $0 \le k \le n$, se define

$$A_k = \{f \in F_n : |\{i : f(i) = i\}| = k\},$$

es decir, A_k es el conjunto de funciones en F_n con exactamente k puntos fijos. Sea $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$.

a) Pruebe que $|A_k| = \binom{n}{k}(n-1)^{n-k}$ y concluya que $|A| = n^n - (n-1)^n$.

b) Se escoge una función al azar en F_n. Calcular la probabilidad de que esa función tenga exactamente k puntos fijos, es decir, que pertenezca a A_k.

c) Calcular p_n, la probabilidad de escoger al azar una función con algún punto fijo.

d) Pruebe que $\lim_{n\to\infty} p_n = (e-1)/e$.

12. 45 personas indistinguibles suben a un bus vacío que tiene 60 asientos distinguibles ubicados de a pares, y cada persona se ubica en un asiento. ¿De cuántas formas pueden quedar ocupados los asientos si:

a) no hay restricciones en la forma de sentarse?

b) se utiliza al menos un asiento de cada par?

c) se utiliza al menos un asiento de cada par, y hay 2 personas que pueden escoger sentarse o quedar de pie?

13. En una competencia de ciclismo por países compiten 3 brasileños, 4 argentinos, 2 uruguayos y 1 chileno. Suponga que no se distingue a loc competidores por nombre, sólo por su nacionalidad. ¿De cuántas maneras puede resultar la competencia? ¿De cuántas formas puede ocurrir que de los 3 brasileños haya uno en los 3 primeros puestos y 2 en los últimos 3?

14. Una urna contiene 3 bolitas rojas y 7 negras. Los jugadores A y B van extrayendo bolitas de a una alternadamente y sin reposición (el jugador A extrae primero). ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bolita roja la extraiga A?

15. Hay 20 niñas y 20 niños en un curso de kinder. Para ir de paseo se suben a un bus y se sientan de a pares al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no quede ninguna niña sentada junto a un niño?

b) Para $i = 1, \ldots, 10$, ¿cuál es la probabilidad de que haya exactamente i parejas de 1 niña y 1 niño?

16. Se ubican 8 torres al azar en un tablero de ajedrez. Calcule la probabilidad de que ninguna torre pueda capturar a otra, es decir, que cada fila y cada columna contiene a lo más una torre.

17. Una urna contiene 5 bolitas rojas, 6 azules y 8 verdes, y se extrae un subconjunto de 3 bolitas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que las bolitas extraídas sean (a) del mismo color?, (b) de colores diferentes? Repita los cálculos suponiendo que las extracciones son con reposición, es decir, cada vez que se extrae una bolita se anota su color y se devuelve a la urna.

18. Un juego de dados tiene las siguientes reglas: se lanzan 2 dados. Si las suma es $2, 3$ ó 12 el jugador pierde. Si es 7 u 11, gana. Si es otro número, el jugador continua lanzando los dados hasta que el resultado sea o bien el resultado que obtuvo inicialmente, o bien un 7. Si es un 7, pierde. Si es el resultado inicial, gana. Calcule la probabilidad de que el jugador gane. *Indicación:* sea E_i el evento "el resultado inicial es i y el jugador gana". Explique por qué la probabilidad buscada es igual a $\sum_{i=1}^{12} \mathbb{P}(E_i)$ y calcule $\mathbb{P}(E_i)$. Para esto, note que $\mathbb{P}(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_{i,n})$, donde $E_{i,n}$ es el evento "el resultado inicial es i y el jugador gana en la n-ésima tirada".

19. Dos cajas contienen fósforos buenos y fósforos malos. Suponga que la primera caja contiene n_1 fósforos buenos y n_2 fósforos malos, y la segunda caja contiene m_1 fósforos buenos y m_2 fósforos malos. Se elige una caja al azar, y de esa caja se elige un fósforo al azar. Calcule la probabilidad de que el fósforo elegido sea bueno.

20. Una mujer embarazada decide hacerse una ecografía para conocer el sexo de su futuro hijo. Se sabe que la probabilidad de que la ecografía diga que es hombre cuando en realidad es hombre, es de un 99 %, y que la probabilidad que diga que es mujer cuando en realidad es mujer es de un 90 %. Suponga que antes de la ecografía las probabilidades de hombre y mujer son iguales a 50 %.

a) Si la ecografía predice que será mujer, ¿cuál es la probabilidad que efectivamente lo sea?

b) Calcule la probabilidad de que la ecografía se equivoque al predecir el sexo.

21. Sean E y F dos eventos tales que $\mathbb{P}(E), \mathbb{P}(F) > 0$. Diremos que el evento F acarrea información negativa acerca de E, denotado por $F \downarrow E$, si $\mathbb{P}(E|F) \leq \mathbb{P}(E)$. Pruebe o dé un contraejemplo a las siguientes afirmaciones:

a) Si $F \downarrow E$, entonces $E \downarrow F$.

b) Si $F \downarrow E$ y $E \downarrow G$, entonces $F \downarrow G$.

22. Las monedas A y B tienen probabilidades de cara p y q, respectivamente, donde $p < q$. Se escoge una de las monedas al azar y se lanza n veces, y se observa que todos los lanzamientos salieron cara.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se haya escogido la moneda A? ¿Qué pasa cuando $n \to \infty$?

b) Se vuelve a lanzar la moneda una vez más. ¿Cuál es la probabilidad de que vuelva a aparecer una cara? ¿Qué pasa cuando $n \to \infty$?

23. La probabilidad que una persona viaje a Buenos Aires durante un año es de un 47 %, la probabilidad que viaje a Miami es de un 38 %, la probabilidad que viaje a Madrid es de un 20 %. La probabilidad que viaje a Madrid y Buenos Aires es de un 7 %, que viaje a Madrid y Miami es de 0,08, que viaje a Buenos Aires y Miami es de 0,15 y la probabilidad que viaje a los 3 lugares es de un 5 %. Determine la probabilidad de que:

a) la persona viaje a alguno de los lugares,

b) viaje sólo a Madrid,

c) viaje sólo a Madrid y Miami.

d) Determine si los sucesos viajar a Buenos Aires y viajar a Madrid son independientes.

24. Se lanza una moneda equilibrada dos veces. Sea A el evento en que la primera moneda cae cara, B el evento en que la segunda moneda cae cara, y C el evento en que ambas monedas caen para el mismo lado. Muestre que estos tres eventos son independientes de a pares (es decir, A independiente de B, B independiente de C y C independiente de A), pero no son independientes en conjunto.

25. Se sabe que el 20 % de la población chilena sufre de depresión. El plan UltraGold de la isapre Winnermédica otorga licencia por depresión teniendo un 90 % de certeza de que el paciente sufre la enfermedad. Un paciente llega a la isapre con los diagnósticos de dos Doctores A y B que indican que tiene depresión. La Isapre estima que que cuando se sufre de depresión, el Dr. A diagnostica la enfermedad en el 99 % de los casos, y el Dr. B en el 98 %. Pero además, cuando no se está enfermo de depresión, el Dr. A "diagnostica" esta enfermedad en el 60 % de los casos y el Dr. B en el 30 % (es decir, dan licencias falsas). Con esta información, ¿debe la isapre otorgarle licencia a este paciente? *Indicación:* suponga que, condicionalmente al estado de salud del paciente, los diagnósticos de los dos doctores son independientes.

26. Considere dos dados equilibrados que se lanzan simultáneamente. Sea X la variable aleatoria igual al producto de los dos dados. Describa el espacio muestral Ω, calcule $\mathbb{P}(X = i)$, $i = 1, 2, \ldots$ y finalmente calcule la función de distribución discreta asociada a X.

27. Se extraen 4 bolitas al azar y sin reemplazo de una urna que tiene 20 bolitas numeradas del 1 al 20. Sea X el número mayor de las bolitas extraídas. Indicar el rango de X y su función de distribución discreta.

28. Un sistema está compuesto por n componentes, cada una de las cuales funciona con probabilidad p, independiente del resto. El sistema completo podrá operar normalmente is al menos la mitad de sus componentes funcionan. ¿Para qué valores de p un sistema de 5 componentes tiene más probabilidad de operar que uno de 3 componentes? En general, ¿cuándo es mejor un sistema de $2k + 1$ componentes que uno de $2k - 1$?

29. Una persona fumadora tiene dos cajas de fósforos, una en su bolsillo izquierdo y otra en el derecho. Cada vez que necesita un fósforo, la persona escoge al azar un bolsillo y saca un fósforo de la caja correspondiente. Suponga que inicialmente ambas cajas tenían N fósforos. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera vez que la persona descubre que una de las cajas está vacía, queden exactamente k fósforos en la otra caja?

30. Sea $a \in \mathbb{R}$ y

$$A = \begin{pmatrix} \Pi_{i=1}^{n}(Y - i) + a & aY \\ 1 & Y \end{pmatrix}$$

Calcular la probabilidad de que A sea invertible si $Y \sim \text{geom}(p)$. Calcule la misma probabilidad pero ahora asumiendo que Y es una variable aleatoria absolutamente continua.

31. Para una cierta constante C, la variable aleatoria X tiene densidad $f_X(x) = Cx^n \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$. Calcular C, obtener $\mathbb{P}(X > x)$ para $x \in [0, 1]$, y encontrar la función F_X.