

**TAREA 2:**  
**RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE SISTEMAS DE EDOS LINEALES**

CRISTÓBAL BERTOGLIO B. - SALOMÉ MARTINEZ S. - GINO MONTECINOS G.  
- CRISTÓBAL QUININAO M. - HÉCTOR OLIVERO Q.

Fecha de entrega: 29 de Mayo, 2016

**INSTRUCCIONES GENERALES**

Los resultados de esta tarea deben ser presentados en un informe breve. Algunos puntos a tener en cuenta:

1. El canal comunicación para responder las dudas sobre el enunciado será el foro tareas.
2. Esta tarea se puede resolver en grupos de 2 o 3 personas. No se aceptarán tareas individuales.
3. Los únicos lenguajes de programación aceptados serán octave y/o matlab.
4. Se debe preparar un informe con la solución de la tarea en pdf (se sugiere L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X o editor de ecuaciones) que incluya el nombre, apellido y sección de cada uno de los integrantes. El informe debe contener: una introducción general del problema, el desarrollo de cada pregunta (resultados y análisis de gráficos) y una breve conclusión.
5. Los gráficos deben ser claros, sus ejes deben estar etiquetados de modo que indiquen tanto la variable que representa como sus unidades. Cada gráfico tiene que tener un título que explique claramente el contenido del gráfico. Si en el gráfico aparece más de una curva, el nombre de cada curva se debe indicar en una leyenda.
6. Los programas deben estar adjuntos, documentados y legibles (nombres de variables adecuados y CADA línea de código debe incluir comentarios). Debe indicarse con qué parámetros se ejecutan las funciones programadas para cada ítem. Se evaluará la facilidad para ejecutar y evaluar los distintos programas.
7. Los programas se deben compactar junto con el informe en un archivo único que se subirá a u-cursos, cuyo nombre incluya el nombre y apellido del alumno. La tarea debe ser subida solo por UNO de los alumnos del grupo.
8. El no cumplimiento de los plazos de entrega se penalizará en la calificación proporcionalmente al atraso, correspondiendo 24 horas de atraso a 1 punto menos y siendo 72 horas de atraso el máximo permitido.

ENUNCIADO DE LA TAREA: RESPUESTA SÍSMICA DE UN EDIFICIO

Esta tarea trata de la modelación y simulación de la respuesta dinámica de estructuras sometidos a cargas sísmicas. El fin de la tarea es tanto resolver una EDO de orden dos que son típicas de este tipo de problemas, así como usar las soluciones numéricas para introducir conceptos básicos en ingeniería sísmica.

Consideraremos el caso simplificado donde asumiremos que el edificio se puede modelar por un sistema de solo un grado de libertad, esto es el clásico oscilador armónico:

$$(1) \quad m(y'' + y_s'') + cy' + ky = 0$$

con  $k, m > 0, c \geq 0$  la rigidez, masa y la constante viscosa del sistema de disipación de energía, respectivamente. La incógnita  $y(t)$  representa el desplazamiento de la estructura relativo al suelo, y la función dada  $y_s(t)$  corresponde al desplazamiento del suelo (producto del sismo) que consideraremos dado.

Resuelva las preguntas que se proponen a continuación:

1. **[0.25 pt]** Muestre que el problema puede ser escrito como

$$(2) \quad \underline{B} \underline{X}' = -\underline{A} \underline{X} + \underline{F}(t)$$

con

$$(3) \quad \underline{X}(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ v(t) \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & -k \\ k & c \end{bmatrix}, \underline{F}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -my_s''(t) \end{bmatrix},$$

donde  $v(t)$  denota la velocidad  $y'(t)$ .

2. **[0.25 pt]** Para un sistema de EDOs de primer orden, los métodos numéricos consisten simplemente en aproximar cada una de las ecuaciones del sistema, y luego resolver para todas las variables discretas simultáneamente.

Como una forma de reducir la cantidad de código a programar, para discretizar el oscilador armónico, usaremos el llamado  $\theta$ -esquema, que consiste en una generalización de los conocidos métodos de Euler y trapecio de la forma

$$\underline{B} \underline{X}_{n+1} = \underline{B} \underline{X}_n - h\underline{A} ((1 - \theta)\underline{X}_n + \theta\underline{X}_{n+1}) + h(1 - \theta)\underline{F}(t_n) + h\theta\underline{F}(t_{n+1})$$

con  $0 \leq \theta \leq 1$ . Note que  $\theta = 0$  corresponde al Euler progresivo,  $\theta = 1/2$  al método de trapecio y  $\theta = 1$  al Euler retrógrado. Muestre que el esquema de avance en el tiempo está dado por

$$\underline{X}_{n+1} = (\underline{B} + h\theta\underline{A})^{-1} \{(\underline{B} - h(1 - \theta)\underline{A})\underline{X}_n + h(1 - \theta)\underline{F}(t_n) + h\theta\underline{F}(t_{n+1})\}$$

3. **[1.5 pt]** Asuma ahora que  $y_s''(t) = 0$  y calcule la solución  $y(t)$  analítica. Usando  $y(0) = y'(0) = 1, 0 \leq t \leq 10, c = \sqrt{km}/50, k = 400\pi^2, m = 100$ , plotee en un mismo gráfico: la solución analítica (negra), y las soluciones numéricas con  $\theta = 0$  (azul),  $\theta = 1/2$  (verde),  $\theta = 1$  (roja). Haga un gráfico distinto para  $h = 0,005$  y  $h = 0,001$ . Comente DETALLADAMENTE los resultados en términos de precisión y estabilidad.
4. **[1.0 pt]** La energía del oscilador se define por

$$E(t) = (m/2)v(t)^2 + (k/2)y(t)^2.$$

Para las constantes del problema anterior, plotee  $E(t)$  evaluada en la solución analítica y numéricas para cada  $\theta$ , respetando la convención de colores. Haga un gráfico distinto

para  $h = 0,005$  y  $h = 0,001$ . Comente DETALLADAMENTE los resultados en términos de precisión y estabilidad. En particular, que puede decir de la monotonía de la energía en cada una de las curvas?

5. **[0.5 pt]** Repita las preguntas 3 y 4 pero ahora con  $c = 0$ . Comente DETALLADAMENTE las similitudes y diferencias de la respuesta del desplazamiento y energía con respecto al caso anterior  $c > 0$ . Cual (o cuales) método(s) recomendaría usted en base a todas estas observaciones?
6. **[1.0 pt]** Calcule la respuesta analítica homogénea sin amortiguamiento de  $y(t)$  para

$$y_s''(t) = 10 \sin(\beta t), \quad \beta = 20\pi, \quad 0 \leq t \leq 5$$

con  $y(0) = y'(0) = 0$  y compárela con la respuesta numérica para  $\theta = 0$ ,  $\theta = 1/2$ ,  $\theta = 1$ , con el fin de verificar que el método numérico esté correctamente implementado para el problema no homogéneo. Qué puede decir del  $h$  crítico (para la estabilidad) de este problema comparado con el problema homogéneo para el euler progresivo?

7. **[1 pt]** Descargue el registro sísmico de Concepción del 2010 (rec\_conce1.mat, de material docente en u-cursos), y ocupe como  $y_s''(t)$  la componenten  $x$  del sismo. Resuelva usando los métodos numéricos  $\theta = 0$ ,  $\theta = 1/2$ ,  $\theta = 1$ ,  $k = 100\pi^2$ ,  $c = 0$  y resuelva para:  $h = 0,005$  (este es el espaciamiento con el que fue guardado el registro sísmico) y  $h = 0,001$ . Comente los resultados en cuanto a estabilidad y diferencias entre las respuestas con los distintos métodos. Indicación: para espaciamientos más pequeños del que se encuentran los datos, asuma que la función  $f(t)$  varía linealmente entre los puntos originales del registro sísmico.
8. **[0.5 pt]** Descargue ahora también el registro sísmico de Melipilla de 1985 (rec\_melip.mat, de material docente en u-cursos), y ocupe como  $y_s''(t)$  la componenten  $x$  del sismo. El objetivo ahora es comparar la respuesta del oscilador para ambos registros sísmicos y para un rango amplio de periodos de vibración del oscilador. Esto se conoce como *espectro de respuesta*, y es cotidianamente utilizado en el diseño sismoresistente de edificios. El periodo de vibración  $T$  se relaciona con la frecuencia natural como  $\omega = 2\pi/T$  (un periodo bajo representa una estructura más rígida, por ejemplo una casa o un edificio de pocos pisos y un periodo alto representa un edificio de muchos pisos).

Resuelva numéricamente usando  $\theta = 1/2$ ,  $c = \sqrt{km}/50$  y  $h = 0,005$  (por lo tanto  $k$  y  $c$  deben ser diferentes para cada periodo), para ambos registros sísmicos en un rango de periodos de vibración entre  $0,05s$  y  $30s$  con intervalos de  $0,05s$ . Plotee el desplazamiento absoluto máximo (en el tiempo) del oscilador v/s el periodo, en una escala semilogarítmica para el eje del periodo. Comente los resultados. Qué sismo sometió a una mayor sollicitación a las estructuras?