

MA2001-2 Cálculo en Varias Variables

Profesor: Manuel del Pino

Auxiliar: José Palacios A. , Sebastián Urzúa B.



Auxiliar 14

08 de Agosto de 2016

1. Resumen

Definición 1. Sea $\rho : D \rightarrow \mathbb{R}$ la densidad de masa, entonces la Masa M está dada por:

$$M = \iint_D \rho(x, y) dx dy,$$

y las coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) del centro de masa están dados por:

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_D x \rho(x, y) dx dy, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \iint_D y \rho(x, y) dx dy.$$

Teorema 1 (Teorema de Cambio de Variable). Sea Ω acotado y $f : U \rightarrow V$ continua y biyectiva. Sea $g : f(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ integrable. Luego, $g \circ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable y

$$\int_{f(\Omega)} g(x) dx = \int_{\Omega} g(f(y)) |det Df(y)| dy.$$

2. Preguntas

P1. Una lámina D tiene forma de semidisco de radio a . Hallar la masa de la lámina y su centro de masa, sabiendo que la densidad de masa varía proporcionalmente a la distancia al centro del lado recto de la lámina.

P2. Sea

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1, (x-1)^2 + y^2 \leq 1\},$$

y sea la transformación $T(u, v) = \left(\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{-v}{u^2+v^2} \right)$.

(a) Dibuje la región Ω . Además, encuentre y dibuje D tal que $T(D) = \Omega$.

(b) Calcule

$$\iint_{\Omega} \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$$

P3. Hallar el volumen limitado por $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 3z$.

P4. Calcule $\iiint_R \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ donde $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

P5. Sea R la región $x^2 + y^2 \leq a^2$. Probar que si m y n son enteros positivos y al menos uno de ellos es impar entonces se tiene que $\iint_R x^m y^n dx dy = 0$.