

MA2001-2 Cálculo en Varias Variables**Profesor:** Manuel del Pino**Auxiliar:** José Palacios A., Sebastián Urzúa B.**Auxiliar Extra 2**

01 de Agosto de 2016

P1. a) Sea $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ integrable. Pruebe que

$$\int_0^1 \left(\int_x^1 g(t) dt \right) dx = \int_0^1 t g(t) dt.$$

b) Usando adecuadamente lo anterior, calcule la integral

$$\int_0^1 \int_x^1 (x - w) \sin(x^3) dx dw.$$

P2. Sean $f : [0, 1] \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 4y^3 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

a) Para $x \in [0, 1]$, calcule $\int_0^1 f(x, y) dy$. Muestre que $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx = 1$ b) Sea $R = [0, 1] \times [0, 1]$. Muestre por definición que $\int_R f$ no existe. Para esto, puede seguir los siguientes pasos:1) Sea $\mathcal{P}$ partición de R más fina que

$$\mathcal{C} = \underbrace{\{[0, 1] \times \left[0, \frac{1}{2}\right]\}}_{C_1}, \underbrace{\{[0, 1] \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]\}}_{C_2}$$

Muestre que para $T \in \mathcal{P}$ tal que $T \subseteq C_1$, $m_T(f) \leq \frac{1}{2}$ y $M_T(f) = 1$ 2) Para la misma partición anterior $\mathcal{P}$, muestre que

$$S_{\mathcal{P}}(f) = \frac{1}{2} + \sum_{T \in \mathcal{P}, T \subseteq C_2} M_T(f) V(T) \quad , \quad I_{\mathcal{P}}(f) \leq \frac{1}{4} + \sum_{T \in \mathcal{P}, T \subseteq C_2} m_T(f) V(T)$$

Concluya que $S_{\mathcal{P}} - I_{\mathcal{P}} \geq \frac{1}{4}$ 3) Sea $\mathcal{A}_n$ una sucesión de particiones cualesquiera de R y sea $\mathcal{B}_n = \mathcal{A}_n \cap \mathcal{C}$. Justifique la desigualdad $S_{\mathcal{B}_n}(f) - I_{\mathcal{B}_n}(f) \leq S_{\mathcal{A}_n}(f) - I_{\mathcal{A}_n}(f)$ y concluya.

c) Explique por qué no hay contradicción entre las partes (1) y (2).

P3. Demuestre que $x^3 y > -\frac{3}{4}$ si $x^4 + y^4 = 1$ **P4.** Encuentre el volumen máximo de un paralelepípedo de diagonal 1

P5. Considere la función

$$f(x, y) = x^{17}y + xy^{23} + xy$$

Muestre que f posee sólo un punto crítico y determine su naturaleza.

P6. (Propuesto) Considere la región del plano

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq 1\}$$

Determine los valores de a , b de modo que la integral

$$\iint_{\Omega} 2x^2 + xy + y^2 - x - 2y + 17 dx dy$$

Sea mínima.