

MA2001-2 Cálculo en Varias Variables**Profesor:** Manuel del Pino**Auxiliar:** José Palacios A. Sebastián Urzúa B.**Auxiliar 12**

29 de Julio de 2016

1. Resumen

Definición 1. Decimos que un conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$ acotado tiene **medida nula**, si $\forall \varepsilon > 0, \exists \{R_i\}_{i \in I}$ rectángulos con I finito tal que $A \subset \bigcup_{i \in I} R_i$ y $\sum_{i \in I} v(R_i) < \varepsilon$.

Teorema 1 (Teorema de los multiplicadores de Lagrange). Sean $f : \mathbb{R}^{N+m} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^{N+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$, funciones de clase $\mathcal{C}^1$. Sea $A = \{z \in \mathbb{R}^{N+m}, g(z) = 0\}$ y supongamos que $z_0 \in A$ es tal que $f(z_0) = \min_{z \in A} f(z)$. Supongamos además que la matriz $g'(z_0)$ de tamaño $(N+m) \times m$ es de rango completo. Entonces existen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ tales que $\nabla f(z_0) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(z_0)$.

2. Problemas

P1. El plano $x + y + 2z = 2$ y el paraboloide $z = x^2 + y^2$ se intersectan en una elipse. Encuentre el punto más cercano y más lejano de este punto al origen.

P2. Consideremos $\mathbb{R}^n$ con la norma euclidiana. Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica (i.e. $A = A^t$). Sea entonces la función

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ \vec{x} \rightarrow x^t A x$$

(a) Demuestre que, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, se tiene que

$$\nabla f(\vec{x}) = 2Ax.$$

(b) Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ (esfera unitaria en $\mathbb{R}^n$). Muestre que $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es punto crítico de f restringido a S si y sólo si x_0 es vector propio de A normalizado.

(c) Suponga ahora que A es definida positiva (i.e. $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x^t A x > 0$). Sea $z \in \mathbb{R}^n$ no nulo, determine los puntos críticos de la función

$$g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ \vec{x} \rightarrow \langle z, x \rangle$$

restringida a $\mathcal{Q} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : f(\vec{x}) = 1\}$.

P3. (a) Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una colección de conjuntos de medida nula. Demuestre que la unión de dicha colección es de medida nula

(b) Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz de constante M . Si $E \subset A$ es de medida nula, muestre que $f(E)$ es de medida nula.

3. Propuestos

P4. Muestre que $\frac{n!}{n^{n/2}}$ es el valor máximo, en $\mathbb{R}^n$, de la función: $f(x) = \prod_{i=1}^n x_i$ sujeto a $\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{i^2} = 1$