

MA2001-2 Cálculo en Varias Variables**Profesor:** Manuel del Pino**Auxiliar:** José Palacios A. Sebastián Urzúa B.**Auxiliar 10**

27 de Mayo de 2016

1. Resumen

Definición 1. Rectángulo: $\mathcal{R} = \prod_{i=1}^N [a_i, b_i]$. Volumen: $V(\mathcal{R}) = \prod_{i=1}^N (b_i - a_i)$. Reticulado: $\mathcal{S} = \{\mathcal{R}_i\}_{i \in I}$. Suma inferior: $I_{\mathcal{S}}(f) := \sum_{i \in I} m_{\mathcal{R}_i}(f) V(\mathcal{R}_i)$, con $m_{\mathcal{R}_i}(f) = \inf_{x \in \mathcal{R}_i} f(x)$. Suma superior: $S_{\mathcal{S}}(f) := \sum_{i \in I} M_{\mathcal{R}_i}(f) V(\mathcal{R}_i)$, con $M_{\mathcal{R}_i}(f) = \sup_{x \in \mathcal{R}_i} f(x)$.

Definición 2. Decimos que un conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$ acotado tiene **medida nula**, si $\forall \varepsilon > 0, \exists \{R_i\}_{i \in I}$ con I finito tal que $A \subset \cup_{i \in I} R_i$ y $\sum_{i \in I} V(R_i) < \varepsilon$.

2. Problemas

P1. Sea $R = [0, 1] \times [0, 1]$. Encuentre una sucesión de reticulados S_n de R tal que $S_{S_n}(f) - I_{S_n}(f) \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$ donde $f(x, y) = e^{x+2y}$. Concluya que f es integrable sobre R y calcule el valor de $\iint_R e^{x+2y} dx dy$.

P2. Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ es no negativo y $\int_D f = 0$, probar que $\{x \in D, f(x) \neq 0\}$ es de medida nula.

Indicación: Pruebe que los conjuntos $A_n = \{x \in D : f(x) > \frac{1}{n}\}$ tienen medida nula.

P3. Sea $R = [0, 1] \times [0, 1]$ y $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada ($\exists M > 0$ tal que $|f(x, y)| \leq M, \forall (x, y) \in R$) tal que

$$f_n(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & y > \frac{1}{n} \\ 0 & y \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

es integrable para todo $n = 1, 2, \dots$. Sea $I_n = \iint_R f_n$.

(a) Pruebe que $I = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ existe.

(b) Pruebe que f es integrable y que $\iint_R f = I$.

Indicación: Demuestre que I_n es de Cauchy probando que si $n > k$ entonces $|I_n - I_k| \leq \frac{M}{k}$. Luego, considere la suma de Riemann $\sum_Q f(c_Q) \text{área}(Q)$ con Q recorriendo la partición $P_{mn}(R)$, con $m \in \mathbb{N}$ y $c_Q \in Q$. Divida la suma en dos partes: en aquellos rectángulos Q que están debajo de $y = \frac{1}{n}$ y el resto.