MA2001-2 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Manuel del Pino
Auxiliar: José Palacios A., Sebastián Urzúa B.

Auxiliar Extra 2

10 de Mayo de 2016

P1. (a) (I) Pruebe que la ecuación $xy = \ln(\frac{x}{y})$ admite una solución $y = \phi(x)$ de clase $\mathcal{C}^1$ definida en una vecindad de $x_0 = \sqrt{e}$, tal que $\phi(x_0) = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

(II) Deduzca que la función ϕ posee un máximo local en x_0.

(b) Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dos funciones de clase $\mathcal{C}^2$. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto tal que $\nabla f(x_0) = 0$, y $H_f(x_0)$ es invertible. Demuestre que para cada $a \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeño, la función

$$f_a(x) = f(x) + ag(x)$$

posee al menos un punto crítico.

P2. Muestre que la ecuación del plano tangente al paraboloide elíptico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$ en el punto (x_0, y_0, z_0) se puede escribir como:

$$2\frac{xx_0}{a^2} + 2\frac{yy_0}{b^2} = \frac{z + z_0}{c}.$$

P3. Considere la función $\rho(x, y)$ que satisface las siguientes condiciones

$$\rho_x(1,3) = 5 \ , \ \rho_y(1,3) = -4 \ , \ \rho_{xx}(1,3) = -2 \ , \ \rho_{yx}(1,3) = -8 \ , \ \rho_{yy}(1,3) = 10$$

Consideremos además dos funciones $x(t)$, $y(t)$ tales que

$$x(0) = 1 \ , \ x'(0) = -1 \ , \ x''(0) = 3 \ , \ y(0) = 3, \ y'(0) = 5 \ , \ y''(0) = -7$$

Definiendo $\phi(t) = \rho(x(t), y(t))$ calcule $\phi''(0)$

P4. Sea f diferenciable. Suponga que se conoce la siguiente información de $f(\cdot)$:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(3,1) = 3 \quad , \quad \hat{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(3,1) = \sqrt{2} \quad , \quad \hat{v} = \frac{1}{\sqrt{10}}(3,1)$$

Con estos datos calcule $\nabla f(3,1)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial \hat{w}}$ si $w = (3,2)$

P5. (a) Considere la función $f(x,y) = 3x^3 + y^2 - 9x - 6y + 1$. Encuentre sus puntos críticos y clasifiquelos. Determine si la función posee mínimo global

(b) Haga lo mismo ahora para la función $f(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)^2$

(c) Finalmente para $f(x,y) = (1-x)(1-y)(x+y-1)$

Propuestos

P6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$. Considere $g(u,v) = f(x,y)$, donde $x = u+v$, $y = uv^2$. Suponiendo que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 1$$

En el punto $(x,y) = (2,1)$, calcule

$$\left.\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\right|_{(1,1)} \quad , \quad \left.\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right|_{(1,1)}$$

P7. Sea $f(x,y) \in \mathcal{C}^2$, con $f_{xx}(0,1) = 0$, $f_x(0,1) = 2$, $f_y(0,1) = f_{yy}(0,1) = 1$ y $f_{xy} = -1$. Si $h(t) = f(t^2, 1+t^3)$, calcule $h''(0)$.