MA2001-2 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Manuel Del Pino.
Auxiliar: José Palacios A., Sebastián Urzúa B.

Auxiliar 8

06 de Mayo de 2016

1. Resumen

Teorema 1 (Teorema de Taylor). *Sea $f:\Omega\subset\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$, Ω abierto. Supongamos que $f\in\mathcal{C}^m$, $m\geq 1$. Sean $x_0\in\Omega$ y $h\in\mathbb{R}^N$ tal que $x_0+t\cdot h\in\Omega$, $\forall t\in[0,1]$. Vale entonces la siguiente expansión: $f(x_0+h)=\sum_{k=0}^{m-1}T_k(h)+R_m(h)$, donde $T_0(h)=f(x_0)$, y para $k\in\{1,\cdots,m-1\}$,*

$$T_k(h)=\sum_{i_1=1}^{N}\sum_{i_2=1}^{N}\cdots\sum_{i_k=1}^{N}\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}}(x_0)h_{i_1}\cdots h_{i_k}, \tag{1}$$

$$R_m(h)=\frac{1}{m!}\sum_{i_1=1}^{N}\sum_{i_2=1}^{N}\cdots\sum_{i_m=1}^{N}\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_m}}(x_0+\xi h)h_{i_1}\cdots h_{i_m}, \tag{2}$$

con $\xi=\xi_h\in]0,1[$

Proposición 1. *Sea $f:\Omega\subset\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$, Ω abierto. Supongamos que x_0 es mínimo (o máximo) local de f, y que f es diferenciable en x_0. Entonces x_0 es punto crítico de f (ie, $\nabla f(x_0)=0$).*

Teorema 2 (Optimalidad y segundo orden). *Sea $f:\Omega\subset\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$, $f\in\mathcal{C}^2(\Omega)$, Ω abierto, y $x_0\in\Omega$ un punto crítico de f. Se tienen entonces las siguientes afirmaciones:*

(a) Si x_0 es mínimo (máximo) local de f entonces la matriz simétrica $f''(x_0)$ es semidefinida positiva (negativa).

(b) Si $f''(x_0)$ es definida positiva (negativa), entonces x_0 es un mínimo (máximo) local estricto de f.

Definición 1. Para $f:\Omega\subset\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$, $f\in\mathcal{C}^2$, un punto crítico x_0 es un **punto silla** si todos los valores propios de $f''(x_0)$ son distintos de 0, y hay presentes valores positivos y negativos.

2. Problemas

P1. Considere $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y)=\sin^2(x+y)+x^2y.$$

(i) Encuentre el polinomio de Taylor de orden 2 para f entorno al punto $(0,0)$.

(ii) Muestre que f es de clase $\mathcal{C}^3$ y pruebe que

$$|f(h_1,h_2)-P_2(h_1,h_2)|\leq\frac{40}{3}||(h_1,h_2)||^3,$$

donde P_2 es el polinomio de Taylor de orden 2 de f entorno de $(0,0)$.

P2. (a) Encuentre todos los puntos críticos, y clasifíquelos, de la función:

$$f(x,y)=\frac{xy}{1+x^4+y^4}$$

(b) Sea $f:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ tal que $f''(x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}^N$. Muestren que existen $c\in\mathbb{R}$ y $v\in\mathbb{R}^N$ tales que $f(x)=c+v\cdot x$

P3. Sea $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ un abierto. Una función $u:\Omega\to\mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ se dice estrictamente subarmónica cuando cumple la desigualdad $\Delta u=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}>0$, $\forall x\in\Omega$. Pruebe que una función subarmónica no puede alcanzar un máximo local en Ω, sino que debe encontrarse en su borde $\partial\Omega$.

P4. (Propuesto) Sea $g(x,y)=xye^{x^2+2y^2}$. Explicite un polinomio de dos variables $T(x,y)$ que cumpla:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{g(x,y)-T(x,y)}{x^4+y^4}=0.$$