MA2001-2 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Manuel del Pino
Auxiliar: José Palacios A., Sebastián Urzúa B.

Auxiliar 6

22 de Abril de 2016

1. Resumen

Teorema 1 (Regla de la Cadena)**.** *Sean $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$, f diferenciable en $x_0 \in A$, g diferenciable en $f(x_0) \in B$. Luego, $g \circ f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ es diferenciable en x_0 y*

$$D(f \circ g)(x_0) = Dg(f(x_0))Df(x_0).$$

Teorema 2 (Teorema de Schwarz)**.** *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable en A. Si las segundas derivadas parciales son continuas en $x_0 \in A$, entonces:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0), \ \forall i, j = 1, \cdots, n.$$

2. Problemas

P1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ función diferenciable tal que $\nabla g(0,0) = (1,3)^T$. Considere la función $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$h(x,y,z) = g(f(x) + f(y)^2, f(x) + f(y)^2 + f(z)^3).$$

Encuentre el vector $\nabla h(0,0,0)$.

P2. Para una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ considere la ecuación diferencial en derivadas parciales:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = e^{4x}\sin^2(y).$$

El objetivo de este problema es encontrar una solución $f(x,y)$ de la ecuación planteada, definida en todo $\mathbb{R}^2$. Para ello proponga una solución del tipo:

$$f(x,y) = g(e^x\cos(y), e^x\sin(y)),$$

encuentre una ecuación para g y resuélvala.

P3. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable. Se define el laplaciano de f como:

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Y la ecuación de Laplace:

$$\Delta f = 0.$$

Suponga que $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, función dos veces diferenciable, satisface la ecuación de Laplace. Pruebe que $v(s,t) = u(st, \frac{1}{2}(s^2 - t^2))$ también satisface la ecuación de Laplace.

P4. Suponga que $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 satisface la ecuación diferencial:

$$y^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0,$$

y considere el cambio de variables $u(x,y) = \frac{y^2 - x^2}{2}$ y $v(x,y) = \frac{y^2 + x^2}{2}$. Pruebe que la ecuación se transforma en:

$$2(v^2 - u^2) \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = u \frac{\partial F}{\partial v} - v \frac{\partial F}{\partial u}.$$