MA2001-2 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Manuel del Pino
Auxiliar: José Palacios A., Sebastián Urzúa B.

Auxiliar Extra 1

11 de Abril de 2016

P1. (a) Encuentre, justificando claramente sus respuestas, adherencia, interior y frontera en $\mathbb{R}^2$ de los siguientes conjuntos. Justifique además si son abiertos, cerrados y/o compactos.

$$A = \left\{ \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n} \right) : m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}, \; B = \left\{ x, y : \exists n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{n} \right\}.$$

(b) Considere el conjunto: $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\} \cup \{(0, 0)\}$. Encuentre la adherencia, el interior y la frontera de A. Es un abierto o cerrado? Justifique su respuesta.

(c) Sean $A, B \subset \mathbb{R}^2$ conjuntos no vacios. Pruebe que $Fr(A \cup B) \subset Fr(A) \cup Fr(B)$

P2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\log(1+x^2+y^2)+x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ \gamma, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Encuentre γ de modo que f sea continua en todo $\mathbb{R}^2$.

(b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ en todo punto $(x, y) \neq (0, 0)$.

(c) Calcule de manera genérica las derivadas direccionales de f.

(d) Calcule, si es que existen, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

(e) Determine en qué puntos son continuas las derivadas parciales de f.

P3. Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado, y $g : C \to \mathbb{R}^m$ definida por $g(x) = f(x) + x$, donde f es Lipschitz de constante $K < 1$, esto es:

$$||f(x) - f(y)|| \leq K||x - y||, \; \forall x, y \in C.$$

a) Muestre que para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de C se tiene:

$$||x_p - x_q|| \leq \frac{1}{1 - K}||g(x_p) - g(x_q)||, \; \forall p, q \in \mathbb{N}.$$

b) Suponiendo que $(g(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge, pruebe que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a un punto $x \in C$.

c) Muestre que la imagen, $g(C)$, es un conjunto cerrado.

P4. Sean α, $\beta \in \mathbb{R}$. Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^\alpha + y^4}{|x| + 3|y|} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \beta & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a) Para $\alpha = 1$, demuestre que no existe ningún valor de $\beta \in \mathbb{R}$ que haga de f un función continua en $(0, 0)$.

b) Para $\alpha = 2$, demuestre que existe $\beta \in \mathbb{R}$ que hace de f una función continua en $(0, 0)$. Encuentre su valor en forma explícita.