

P1

a) Debemos ver si  $T[f]$  es continua en  $[a, b]$ , es decir,  $\forall x \in [a, b]$ ,

PDA:  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |x - y| < \delta \Rightarrow |T[f](x) - T[f](y)| < \varepsilon$

Para ello, utilizaremos el hecho de que  $K$  es continua (de hecho, es uniformemente continua ya que está definida a partir de un conjunto compacto).

Entonces se tiene que:  $\forall \varepsilon_1 > 0, \exists \delta > 0, |x - y| < \delta \Rightarrow |K(x, t) - K(y, t)| < \varepsilon_1$ .

Ahora, dado  $\varepsilon > 0$ ,

$$\begin{aligned} |T[f](x) - T[f](y)| &= \left| \int_a^b (K(x, t) - K(y, t)) f(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |K(x, t) - K(y, t)| |f(t)| dt \end{aligned}$$

Notemos que  $f$  es continua en un intervalo cerrado acotado  $\Rightarrow f$  es acotada, es decir,  $\exists x_0 \in [a, b], |f(x)| \leq |f(x_0)| \forall x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} &\leq |f(x_0)| \int_a^b \underbrace{|K(x, t) - K(y, t)|}_{\varepsilon_1} dt \\ &\leq |f(x_0)| (b-a) \varepsilon_1 \end{aligned}$$

Luego, para cualquier  $\varepsilon > 0$ , basta considerar  $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{(b-a)|f(x_0)|}$  con el respectivo  $\delta > 0$  (el cual sabemos que existe ya que  $K$  es continua), y tenemos la continuidad de  $T[f]$  en  $x$ . Como esto es  $\forall x \in [a, b]$ , se concluye que  $T[f]$  es continua. Además, como se cumple para ~~cualquier~~ toda función  $f \in C([a, b])$ , entonces se demuestra lo pedido.

b) Primero que nada, notemos que  $T$  es un operador lineal.

Como  $K$  y  $f$  son continuas sobre un compacto, entonces ambas alcanzan su máximo.

Luego, por la parte a), se tiene que:  $(M = \max_{x \in [a, b]} |K(x, t)|)$

$$|T[f](x)| \leq \int_a^b |K(x, t)| |f(t)| dt \leq M(b-a) \cdot \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| = C \|f\|_\infty$$

$$\text{Pero, } \|T[f](x)\|_1 = \int_a^b |T[f](t)| dt \leq \int_a^b C \|f\|_\infty dt = \underbrace{C(b-a)}_A \|f\|_\infty$$

$\Rightarrow \|T[f](x)\|_1 \leq A \|f\|_\infty$  y como  $T$  es lineal, se concluye que

$T$  es continua de  $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C[a, b], \|\cdot\|_1)$

Para ver si es continua con la norma  $\|\cdot\|_\infty$  en el espacio de llegada, notemos que

$$\|T[f](x)\| \leq C \|f\|_\infty \quad (\text{Por la parte anterior}) \quad \begin{array}{l} \text{Como se cumple } \forall x \in [a,b], \text{ se} \\ \text{cumple también para el supremo} \end{array}$$

$$\Rightarrow \|T[f]\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |T[f](x)| \leq C \|f\|_\infty$$

$\therefore \|T[f]\|_\infty \leq C \|f\|_\infty \Rightarrow T$  es continua con  $\|\cdot\|_\infty$  en el espacio de llegada.

c) Sea  $f \in \overline{I_\infty}$ . Existe por lo tanto,  $(f_n) \in I_\infty$  con  $f_n \rightarrow f$  (con la norma  $\|\cdot\|_\infty$ )

Veamos que  $T[f] = f$ :

$$\begin{aligned} \|T[f] - f\|_\infty &= \|T[f] - f + T[f_n] - T[f_n] + f_n - f_n\|_\infty \\ &\leq \|T[f] - T[f_n]\|_\infty + \|T[f_n] - f_n\|_\infty + \|f_n - f\|_\infty \end{aligned}$$

Pero  $T[f_n] = f_n$  y  $\|T[f] - T[f_n]\|_\infty \leq C \|f - f_n\|_\infty$  (Por la parte b))

$$\Rightarrow \|T[f] - f\|_\infty \leq (C+1) \|f - f_n\|_\infty \rightarrow 0 \quad \text{ya que } \|f - f_n\|_\infty \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow T[f] = f \Rightarrow f \in I_\infty \Rightarrow \overline{I_\infty} = I_\infty \Rightarrow I_\infty \text{ es cerrado.}$$

• Alternativo:

Sabemos que  $T[f_n] - f_n = 0$ , pero  $T[f_n] - f_n \rightarrow T[f] - f$ , luego, por unicidad del límite se concluye

$$\begin{aligned} d) \|T[f_1] - T[f_2]\|_\infty &= \sup_{x \in [a,b]} \left| \int_a^b k(x,t) (f_1(t) - f_2(t)) dt \right| \\ &\leq (b-a) M \cdot \sup_{x \in [a,b]} |f_1(x) - f_2(x)| \quad \text{con } M = \max_{t \in [a,b]} |k(x,t)| \\ &= \underbrace{(b-a) M}_L \|f_1 - f_2\|_\infty \end{aligned}$$

Luego, para que sea contractante, la constante de Lipschitz debe ser menor a 1

$$L < 1 \Rightarrow \underline{(b-a) M < 1} \quad \text{Para que } T \text{ sea contractante.}$$

Como  $C([a,b])$  es Banach y es cerrado, si  $T$  es contractante, entonces tiene un único punto fijo, por lo tanto,  $I_\infty = \{\bar{f}\}$ , donde  $\bar{f}$  es el único punto fijo.

P2 a) Sea  $x \in B(x_0, r)$ ,  $\delta = (r - \|x - x_0\|)/2$

luego  $B(x, \delta) \subseteq B(x_0, r)$  en efecto

$$y \in B(x, \delta) \Leftrightarrow \|y - x\| < \delta \quad \text{Ahora}$$

$$\|y - x_0\| \leq \|y - x\| + \|x - x_0\| < r.$$

b)  $A + B = \bigcup_{x \in B} x + A$  y como  $x + A$  es ABIERTO se concluye.

• AGUMENTAR PORQUE  $x + A$  ES ABIERTO

c)  $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists (x_n) \in A$  tal que  $x_n \rightarrow x$   
 $\Leftrightarrow \exists (x_n) \subseteq A$  t.q.  $\|x_n - x\| \rightarrow 0$   
 $\Leftrightarrow d(x, A) = 0$

d) Primero  $\bar{A}^c \subseteq A^c$  y  $\bar{A}^c$  es ABIERTO

$$\Rightarrow (\text{TOMANDO INTERIOR}) \quad \text{Int}(A^c) \supseteq \bar{A}^c$$

$$\therefore \text{Int}(A^c)^c \subseteq \bar{A}$$

Ahora si  $x \notin \text{Int}(A^c)^c \Rightarrow x \in \text{Int}(A^c)$

$$\Rightarrow (\exists \delta_x > 0) (B(x, \delta_x) \subseteq A^c)$$

$$\Rightarrow (\exists \delta_x > 0) (B(x, \delta_x) \cap A = \emptyset)$$

$$\Rightarrow x \notin \bar{A}$$

$$\therefore \text{Int}(A^c) \subseteq \bar{A}^c \Leftrightarrow \bar{A} \subseteq \text{Int}(A^c)^c$$

P3

a) Veamos la continuidad en  $(0,0)$ :

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} - 0 \right| = \left| \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} \right| \leq \left| \frac{x^3 y}{x^2 y} \right| = |x| \rightarrow 0$$

$\Rightarrow$  es continua en cero, y por álgebra de fn. continuas, es continua en todo el dominio, el cual es  $\mathbb{R}^2$  (está definida para todo punto en  $\mathbb{R}^2$ )

$$b) \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2 y (x^4 + y^2) - x^3 y \cdot 4x^3}{(x^4 + y^2)^2} = \frac{3x^2 y^3 - x^6 y}{(x^4 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3 (x^4 + y^2) - x^3 y \cdot 2y}{(x^4 + y^2)^2} = \frac{x^7 - x^3 y^2}{(x^4 + y^2)^2}$$

Ambas derivadas parciales son continuas en  $(x,y) \neq (0,0)$ , por lo tanto  $f$  es diferenciable en  $(x,y) \neq (0,0)$  (son continuas por álgebra de continuas)

c) Sea  $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$  con  $|h| = 1$

$$\begin{aligned} f'(0,0), h) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(th_1, th_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \cdot \frac{t^3 h_1^3 + t h_2}{t^4 h_1^4 + t^2 h_2^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{h_1^3 h_2}{t^2 h_1^4 + h_2^2} \cdot t \end{aligned}$$

$$\underline{h_1 = 0}: f'(0,0), \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{0^3 \cdot h_2 \cdot t}{t^2 \cdot 0^4 + h_2^2} = 0$$

$$\underline{h_2 = 0}: f'(0,0), \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{h_1^3 \cdot 0 \cdot t}{t^2 \cdot h_1^4 + 0^2} = 0$$

$$\underline{h_1 \neq 0, h_2 \neq 0}: f'(0,0), \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{h_1^3 \cdot h_2}{t^2 h_1^4 + h_2^2} t = \frac{h_1^3 \cdot h_2 \cdot 0}{0 + h_2^2} = 0$$

d) Veamos el límite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - \left( f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0) \right)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}}$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{x^3 y}{x^4 + y^2} - \left( 0 + 0(x-0) + 0(y-0) \right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

ya que por la parte c), se tenía que  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{x^4 + y^2}$$

Pero este límite no es cero, ya que basta tomar la sucesión  $(x_n, y_n) = (1/n, 1/n^2)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{x_n^3 y_n}{x_n^4 + y_n^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} &= \frac{1/n^3 \cdot 1/n^2}{1/n^4 + 1/n^4} \cdot \frac{1}{\sqrt{1/n^2 + 1/n^4}} = \frac{1/n^5}{2/n^4} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n} \sqrt{1 + 1/n^2}} \\ &= \frac{1}{2n} \cdot \frac{n}{\sqrt{1 + 1/n^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 1/n^2}} \rightarrow \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Y ya que el límite no es cero, entonces  $f$  no es diferenciable en  $(0,0)$ .

P4

a) Por regla de la cadena, tenemos:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \cos(x-y)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot (-\cos(x-y))$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 &= \left[ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \cos(x-y) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \cos^2(x-y) \right] \\ &\quad + \left[ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \cos(x-y) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \cos^2(x-y) \right] \\ &= 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + 2\cos^2(x-y) \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \end{aligned}$$

Ahora notemos que los derivados parciales se deben evaluar:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) ; \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) ; \frac{\partial f}{\partial u}(u(x,y), v(x,y)) ; \frac{\partial f}{\partial v}(u(x,y), v(x,y))$$

b)  $\frac{\partial f}{\partial u} = -\arcsen(v) ; \frac{\partial f}{\partial v} = 2v - \frac{u}{\sqrt{1-v^2}} ;$

$$\begin{aligned} g(x,y) &= f(x+y, \sin(x-y)) = \sin^2(x-y) - (x+y) \cdot \arcsen(\sin(x-y)) \\ &= \sin^2(x-y) - x^2 + y^2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2\cos(x-y)\sin(x-y) - 2x ; \frac{\partial g}{\partial y} = -2\cos(x-y)\sin(x-y) + 2y$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 = 4 \left[ 2\cos^2(x-y)\sin^2(x-y) + x^2 + y^2 - 2\cos(x+y)\sin(x-y)(x+y) \right]$$

$$\begin{aligned} \text{pero } 2\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + 2\cos^2(x-y)\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 &= 2\arcsen^2(v) + 2\cos^2(x-y) \left[ 4v^2 + \frac{u^2}{1-v^2} - \frac{4vu}{\sqrt{1-v^2}} \right] \\ &= 2(x-y)^2 + 2\cos^2(x-y) \left[ 4\sin^2(x-y) + \frac{(x+y)^2}{1-\sin^2(x-y)} - \frac{4(x+y)\sin(x-y)}{\sqrt{1-\sin^2(x-y)}} \right] \\ &= 2(x^2+y^2-2xy) + 8\cos^2(x-y)\sin^2(x-y) + 2(x^2+y^2+2xy) - 8(x+y)\cos(x-y)\sin(x-y) \\ &= 4 \left[ x^2 + y^2 + 2\cos^2(x-y)\sin^2(x-y) - 2(x+y)\sin(x-y)\cos(x-y) \right] \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene igualdad  $= \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2$

c) Ec. de Plano tangente:

$$\begin{aligned} Z &= f(\mu_0, v_0) + \left\langle \nabla f(\mu_0, v_0), \begin{pmatrix} \mu - \mu_0 \\ v - v_0 \end{pmatrix} \right\rangle & \mu_0 &= 1 \\ &= f(1, 0) + \left\langle \nabla f(1, 0), \begin{pmatrix} \mu - 1 \\ v \end{pmatrix} \right\rangle & v_0 &= 0 \end{aligned}$$

$$f(1, 0) = 0^2 - 1 \cdot \arcsen(0) = 0$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \partial f / \partial \mu \\ \partial f / \partial v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\arcsen v \\ zv - \frac{\mu}{\sqrt{1-v^2}} \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Z = 0 + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu - 1 \\ v \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow Z = -v \Rightarrow \underline{Z + v = 0}$$

P5) a)

i) Veamos si el límite cuando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  de  $f(x, y)$  es cero:

$$|f(x, y) - 0| = |(2x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)| \leq |2x^2 + y^2| \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$$

Por lo tanto,  $f(x, y)$  es continua en cero, y por álgebra de continuas, es continua en todo  $\mathbb{R}^2$

ii) Primero, consideremos  $z = \tan(xy)$  y notemos que  $z \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (\frac{\pi}{4}, 1)} 1$

$$\text{luego: } \lim_{(x, y) \rightarrow (\frac{\pi}{4}, 1)} \frac{1}{1 - \tan(xy)} = \lim_{z \rightarrow 1} z^{\left(\frac{1}{1-z}\right)} = \lim_{z \rightarrow 1} \exp\left(\frac{\ln z}{1-z}\right)$$

$$\text{Puesto que la exponencial es continua} \Rightarrow \lim_{z \rightarrow 1} \exp\left(-\frac{\ln z}{z-1}\right) = \exp\left(-\lim_{z \rightarrow 1} \frac{\ln z}{z-1}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (\frac{\pi}{4}, 1)} \frac{1}{1 - \tan(xy)} = e^{-1} = \exp(-1) = e^{-1}$$

$\therefore g$  es continua en  $(\frac{\pi}{4}, 1)$ , y por álgebra de continuas, es continua en todo su dominio

iii) Veamos si el límite cuando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  es cero:

$$\begin{aligned} |h(x, y) - 0| &= \left| \frac{|xy|^\alpha}{x^2 - xy + y^2} \right| = \left| \frac{\rho^\alpha |\cos \theta|^\alpha |\sin \theta|^\alpha}{\rho^2 (\cos^2 \theta - \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta)} \right| \quad \begin{array}{l} \text{con} \\ x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ \rho \rightarrow 0, \theta \rightarrow \theta \end{array} \\ &= \left| \frac{\rho^\alpha |\cos^\alpha \theta \sin^\alpha \theta|}{\rho^2 (1 - \cos \theta \sin \theta)} \right| \leq \left| \frac{\rho^\alpha}{\rho^2 (1 - \cos \theta \sin \theta)} \right| \end{aligned}$$

$$= \left| \frac{\rho^{\alpha-2}}{1 - \cos \theta \sin \theta} \right| \quad \begin{array}{l} \text{Notemos que para que converja a cero, se debe} \\ \text{tener que } \rho^{\alpha-2} \rightarrow 0, \text{ luego } \frac{\alpha-2 > 2}{\alpha > 1} \\ \text{para garantizar continuidad} \end{array}$$

Obs: El denominador  $1 - \cos \theta \sin \theta$  no se anula, ya que

$$1 - \cos \theta \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \cos \theta \sin \theta = 1 \Leftrightarrow \sin(2\theta) = 1 \text{ lo que es imposible}$$



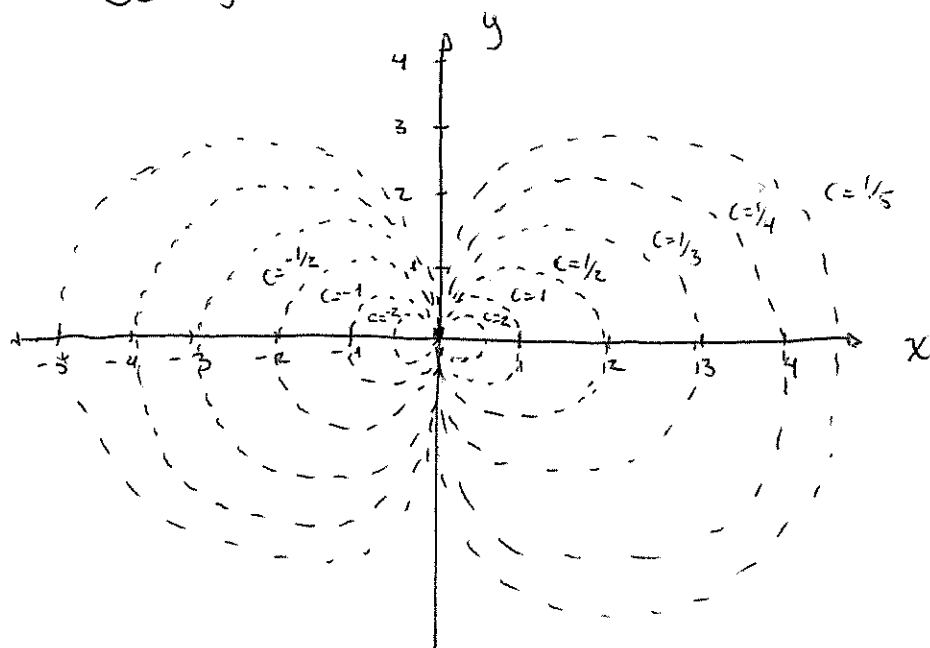
b)

$$i) f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} = C \Rightarrow x^2 - \frac{x}{C} + y^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{x}{C} + \frac{1}{4C^2} + y^2 = \frac{1}{4C^2} \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2C}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4C^2}$$

Por lo tanto, las curvas de nivel son circunferencias de radio

$$R = \frac{1}{2C} \text{ y centro } \left(\frac{1}{2C}, 0\right)$$



ii) Podemos que todas las curvas de nivel, comienzan o terminan en el origen, es decir, el punto  $(0,0)$  está relacionado a un Número infinito de curvas de nivel distintas, por lo tanto, al acercarme al origen, puedo hacerlo desde distintas curvas, y al evolucionar en la función, obtendré diferentes valores dependiendo por cual circunferencia me esté acercando. Por lo tanto, el límite no existe (no es único, depende del camino que se tome, o de la circunferencia que elija).