

PAUTA CONTROL I CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES, 2014/1

- (1) (a) (3pts) Considere la superficie definida por la ecuación

$$z = \sin(\pi x^2)e^{x-y^3}$$

Encuentre la ecuación del plano tangente a esta superficie en el punto  $(1, 1, 0)$ .

**Solución.**

Sea  $f(x, y) = \sin(\pi x^2)e^{x-y^3}$ . La ecuación del plano tangente es

$$z = f(1, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)(y - 1)$$

Tenemos  $f(1, 1) = 0$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{x-y^3}[\sin(\pi x^2) + 2\pi x \cos(\pi x^2)], \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -3e^{x-y^3}y^2 \sin(\pi x^2)$$

de modo que la ecuación buscada es

$$z = -2\pi(x - 1) - 3(y - 1).$$

□

- (b) (3pts) Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} x^2y + e^{xy} \\ x + y^2 \\ \sin(xy) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \\ f_3(x, y) \end{bmatrix}$$

Demuestre que  $f$  es diferenciable en el punto  $(1, 0)$  y encuentre su matriz derivada (matriz Jacobiana) en este punto.

**Solución.** La matriz Jacobiana en el punto  $(x, y)$  está dada por

$$\begin{bmatrix} -2xy + ye^{xy} & x^2 + xe^{xy} \\ 1 & 2y \\ -\cos(xy)y & -\cos(xy)x \end{bmatrix}$$

Las entradas de esta matriz corresponden a las derivadas parciales de  $f$ . Éstas claramente definen funciones continuas en  $(1, 0)$ . Por ejemplo si  $(x_n, y_n) \rightarrow (1, 0)$ , tenemos

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x_n, y_n) = -2x_n y_n + y_n e^{x_n y_n} \rightarrow 0 = \frac{\partial f_1}{\partial x}(1, 0)$$

gracias al álgebra de los límites de sucesiones reales y la continuidad de la función exponencial. Lo mismo puede hacerse con las restantes entradas. Se sigue que  $f$  es diferenciable en  $(1, 0)$  y su matriz derivada (Jacobiana) es

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad \square$$

(2) Considere la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(\sqrt{x^2 + y^2})}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \frac{1}{2} & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) (2pts) Demuestre que  $f$  es diferenciable en todo punto  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ .

**Solución.**

Por derivación directa vemos que para  $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})x\sqrt{x^2 + y^2} - 2x(1 - \cos(\sqrt{x^2 + y^2}))}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})y\sqrt{x^2 + y^2} - 2y(1 - \cos(\sqrt{x^2 + y^2}))}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Estas funciones son claramente continuas en todo punto  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ . En efecto, si  $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$  entonces usando las propiedades algebraicas de los límites de sucesiones y la continuidad de las funciones  $\sin$  y  $\sqrt{\phantom{x}}$  vemos que  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ , similarmente para  $\frac{\partial f}{\partial y}$ . Se sigue que  $f$  es diferenciable en  $(x_0, y_0)$ .  $\square$

(b) (2pts) Calcule, si existen, las derivadas parciales  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$

**Solución.** Por definición, tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \frac{1 - \cos t - \frac{1}{2}t^2}{t^3}$$

Usando la regla de L'hôpital (dos veces) obtenemos que  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$  y del mismo modo,  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ .  $\square$

(c) (2pts) Determine si  $f$  es diferenciable en  $(0, 0)$ .

**Solución.**

Usando las partes anteriores: Como

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| = |x| \frac{|\sin(\sqrt{x^2 + y^2})\sqrt{x^2 + y^2} - 2(1 - \cos(\sqrt{x^2 + y^2}))|}{(x^2 + y^2)^2} \leq$$

$$t \frac{|\sin(t)t - 2(1 - \cos t)|}{t^4}, \quad t = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Cuando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ , tenemos que  $t \rightarrow 0$  y gracias a una aplicación sucesiva de la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)t - 2(1 - \cos t)}{t^3} = 0.$$

Concluimos que

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$$

y en modo similar

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Así, las derivadas parciales de  $f$  son continuas en  $(0,0)$  y por ende  $f$  es diferenciable en  $(0,0)$ .  $\square$

(3) Sean  $A$  y  $B$  subconjuntos de  $\mathbb{R}^N$

(a) (2pts) Demuestre que

$$\text{Adh}(A \cup B) = \text{Adh}(A) \cup \text{Adh}(B)$$

**Solución.** Probemos primero que

$$\text{Adh}(A \cup B) \subset \text{Adh}(A) \cup \text{Adh}(B).$$

Sea  $x \in \text{Adh}(A \cup B)$ . Entonces existe una sucesión  $x_n \in A \cup B$  tal que  $x_n \rightarrow x$ . Tenemos que un número infinito de términos de la sucesión  $x_n$  están o bien en  $A$  o bien en  $B$ . Esta colección de términos constituye una subsucesión de  $x_n$  por ende converge a  $x$ . Así,  $x$  es o bien el límite de una sucesión en  $A$  o de una sucesión en  $B$ . Por lo tanto  $x \in \text{Adh}(A) \cup \text{Adh}(B)$ . Recíprocamente probemos que

$$\text{Adh}(A) \cup \text{Adh}(B) \subset \text{Adh}(A \cup B).$$

Supongamos que  $x \in \text{Adh}(A)$ . Entonces existe una sucesión  $x_n \in A$  con  $x_n \rightarrow x$ . Esta sucesión también satisface  $x_n \in A \cup B$ , y por lo tanto  $x \in \text{Adh}(A \cup B)$ . Entonces  $\text{Adh}(A) \subset \text{Adh}(A \cup B)$ . Del mismo modo,  $\text{Adh}(B) \subset \text{Adh}(A \cup B)$ , y concluimos que  $\text{Adh}(A) \cup \text{Adh}(B) \subset \text{Adh}(A \cup B)$ .  $\square$

(b) (2pts) Deduzca, a partir de (a) que la unión de dos conjuntos cerrados es un cerrado y que la intersección de dos conjuntos abiertos es un abierto.

**Solución.** Si  $A$  y  $B$  son cerrados entonces

$$A \cup B = \text{Adh}(A) \cup \text{Adh}(B) = \text{Adh}(A \cup B)$$

y entonces  $A \cup B$  es cerrado. Por otra parte, si  $A$  y  $B$  son abiertos, entonces sus complementos  $A^c$  y  $B^c$  son cerrados. De aquí, y lo recién demostrado, tenemos que  $A^c \cup B^c$  es cerrado. En otras palabras  $(A \cap B)^c$  es cerrado, y así,  $A \cap B$  es abierto.  $\square$

(c) (2pts) Demuestre que el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + \sin(y) < \log(1 + |x| + |y|)\}$$

es un abierto en  $\mathbb{R}^2$ .

**Solución.** Notemos que

$$A^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + \sin(y) \geq \log(1 + |x| + |y|)\}.$$

Sea  $(x_0, y_0) \in \text{Adh}(A^c)$ . Entonces existe  $(x_n, y_n) \in A$  con  $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$ . Por el álgebra de los límites de sucesiones y la continuidad de las funciones  $\sin$  y  $\log$  tenemos que

$$x_0^2 + \sin(y_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 + \sin(y_n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \log(1 + |x_n| + |y_n|) = \log(1 + |x_0| + |y_0|)$$

y por lo tanto  $(x_0, y_0) \in A$ . Así, hemos probado que  $\text{Adh}(A^c) \subset A^c$  y por lo tanto hay igualdad, y  $A^c$  es cerrado. Se sigue que su complemento, esto es  $A$ , es un conjunto abierto.  $\square$